

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Um médico prescreve uma dosagem de uma determinada substância química a ser administrada oralmente. A quantidade de substância química assimilada pelo organismo, mais a que foi eliminada pela urina, T horas após ter sido tomada, é dada por $\int_0^T E(t) dt$, onde E é a taxa de eliminação da substância. Uma taxa de eliminação típica é dada pela função

$$E(t) = te^{-kt},$$

onde $k > 0$ e t é o tempo em horas.

- (a) Determine

$$\int_0^{+\infty} E(t) dt$$

e interprete a resposta, isto é, diga o que é que o integral representa.

- (b) Supondo que o médico prescreve uma dosagem de 100 mg, determine o valor de k .

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

- (a) A equação $x^5 + 10x + 3 = 0$ tem exactamente uma raiz real.

- (b) Se f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(t) dt = 0$ então $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.

- (c) A função $y = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

- (d) Se a matriz invertível A verifica $A^2 - 3A + I = 0$, em que I é a matriz identidade, então

$$A^{-1} = 3I - A.$$

3. (a) Calcule o valor do integral

$$\int_0^{\pi/2} (1+x) \operatorname{sen} x dx;$$

- (b) Calcule

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx,$$

usando a mudança de variável $x = t^2$.

- (c) Determine o valor de a por forma a que a área da figura limitada por $0 \leq y \leq e^{-x}$ e $-a \leq x \leq a$ seja $\frac{8}{3}$.

4. Um isótopo de estrôncio, ^{90}Sr , tem uma meia-vida de 25 anos. Atendendo a que a sua taxa de decaimento é proporcional à massa existente em cada instante, calcule:

- (a) a massa de ^{90}Sr que resta a partir de uma amostra de 18 mg depois de t anos;

- (b) o tempo que levaria para a massa decair para 2 mg.

5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' \cos x & = 1 - y \operatorname{sen} x, \\ y(0) & = 1. \end{cases}$$

6. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + \beta y + z = \beta^2 \end{cases}$$

em que β é um parâmetro real.

- (a) Discuta a natureza do sistema em função de β .
 (b) Resolva o sistema para o caso em que $\beta = -1$.

7. A concentração de um medicamento no organismo de certo indivíduo ao fim de t horas é dada por $C(t) = a + bt^2$.

- (a) A partir dos seguintes dados experimentais

t (horas)	0	1	2	3
C (concentração)	10	7	5	1

obtenha a e b usando o método dos mínimos quadrados.

- (b) Estime a concentração do medicamento após 4 horas.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)
Primitiva de $f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Primitiva de $f' \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
Primitiva de $f' \operatorname{tg} f$	$-\ln \cos f + C$
Primitiva de $f' \sec^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$