Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Biomatemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

15 de Janeiro de 2010 | Duração: 2,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Uma companhia aérea aceita uma caixa se o seu comprimento (c), largura (l) e altura (a) verificarem a relação $c + l + a \leq 158$ cm. Supondo a altura fixa, mostre que o volume máximo $(158 - l - a)la$ é
$$V = a\left(79 - \frac{a}{2}\right)^2.$$

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
   (a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.
   (b) Se f é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 0$ então $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.
   (c) Se b é uma coluna de A então o sistema $Ax = b$ é possível.
   (d) Qualquer que sejam as matrizes A e B invertíveis, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. (a) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + e^t}\, dt$, com a mudança de variável $e^t = x$.
   (b) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 + x) \operatorname{sen} x\, dx$.
   (c) Calcule $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1 + 2e^x}}\, dx$.
   (d) Determine a área da região definida pelas condições $y > 0$, $y = e^{x+1}$ e $x < 0$.

4. No processo de conservação de alimentos o açúcar de cana passa por uma conversão na qual se transforma numa mistura de glucose e frutose. Sabe-se que numa solução diluída a taxa de conversão é proporcional à concentração $y(t)$ de açúcar não alterado. Sabendo que a dita concentração no instante inicial é igual a $1/50$ e ao fim de 3 horas é de $1/200$, determine a concentração de açúcar alterado ao fim de 6 horas.

5. Determine a solução do problema de condição inicial
$$\begin{cases} y' &= \cos x - y\cos x, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

6. Em função do valor do parâmetro real p, discuta a natureza do sistema
$$\begin{cases} x + y + z &= p + 1 \\ x + py + z &= 1 \\ px + y &= p + 2p^2 \end{cases}.$$

v.s.f.f.

7. Obtiveram-se as cotas x_i de um conjunto de pontos $i = 1, 2, 3, 4$ relativamente uns aos outros, tendo-se tomado a cota do ponto $i = 4$ como referência. As relações obtidas foram as seguintes:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1{,}0 \\ x_2 - x_3 = 2{,}0 \\ x_3 - x_4 = 1{,}5 \\ x_1 - x_4 = 3{,}0 \\ x_1 - x_3 = 2{,}8 \\ x_2 - x_4 = 3{,}0 \end{cases}.$$

Considerando $x_4 = 0$, determine uma estimativa para as cotas dos restantes pontos usando o método dos mínimos quadrados.

Formulário	
Primitiva de $f^m\ f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
Primitiva de $\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
Primitiva de $a^f\ f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C\ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
Primitiva de $f'\ \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Primitiva de $f'\ \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$