

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Uma companhia aérea aceita uma caixa se o seu comprimento (c), largura (l) e altura (a) verificarem a relação $c + l + a \leq 158$ cm. Supondo a altura fixa, mostre que o volume máximo $(158 - l - a)la$ é

$$V = a \left(79 - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Determine as dimensões da caixa de volume máximo.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

- (a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
 (b) Se uma função é contínua num ponto, então é derivável nesse ponto.

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = 1$.

- (d) A matriz $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é ortogonal, isto é, $A^{-1} = A^T$.

3. (a) Calcule $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx$, com a substituição $x = t^2$.

(b) Calcule $\int \frac{1}{x(2 - 3 \ln x)^{2/3}} \, dx$.

- (c) Determine a área da região definida pelas condições $y > 0$, $y = e^{x+1}$ e $x < 0$.

- (d) Calcule o volume de um cone de altura h e raio da base r .

4. Suponha que uma dada população está dividida em dois grupos: aqueles que sofrem de uma certa doença infecto-contagiosa, e aqueles que não sofrem dessa doença mas que a podem contrair por contacto com uma pessoa infectada. Sabe-se que a taxa de propagação desta doença é directamente proporcional ao número de contactos entre gente infectada e gente sã. Suponha que os dois grupos convivem sem qualquer tipo de precaução.

- (a) Determine a equação diferencial que descreve a propagação desta doença.

- (b) Se 1/4 da população está infectada num determinado instante $t = 0$, esboce o gráfico da função que descreve a propagação da doença, a partir desse instante.

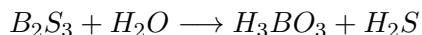
- (c) Quanto tempo decorrerá até que toda a população esteja doente?

5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} (1 + x^2)y' + 2xy = (1 + x^2)x \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

com $x \in [0, 1]$.

6. O sulfureto de boro reage violentamente com a água para produzir ácido bórico e sulfureto de hidrogénio gasoso (o cheiro a ovos podres). A equação que descreve a reacção é:



Em que proporção devem os componentes ser misturados? (Nota: O número de átomos presentes mantém-se constante ao longo da reacção.)

7. A pressão sistólica p (em milímetros de mercúrio) de uma criança saudável com peso w (em quilogramas) é dada, de forma aproximada, pela equação $p = a + b \ln w$. Use os seguintes dados experimentais

w	20	28	37	51	59
p	91	99	104	108	111

para estimar a pressão sistólica de uma criança de 45 quilogramas.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)
Primitiva de $f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Primitiva de $f' \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$