

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Uma companhia aérea aceita uma caixa se o seu comprimento ( $c$ ), largura ( $l$ ) e altura ( $a$ ) verificarem a relação  $c + l + a \leq 158$  cm. Supondo a altura fixa, mostre que o volume máximo  $(158 - l - a)la$  é

$$V = a \left( 79 - \frac{a}{2} \right)^2.$$

Determine as dimensões da caixa de volume máximo.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

- (a) Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se que  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .  
 (b) Se uma função é contínua num ponto, então é derivável nesse ponto.

(c)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = 1$ .

- (d) A matriz  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  é ortogonal, isto é,  $A^{-1} = A^T$ .

3. (a) Calcule  $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx$ , com a substituição  $x = t^2$ .

(b) Calcule  $\int \frac{1}{x(2 - 3 \ln x)^{2/3}} \, dx$ .

- (c) Determine a área da região definida pelas condições  $y > 0$ ,  $y = e^{x+1}$  e  $x < 0$ .

- (d) Calcule o volume de um cone de altura  $h$  e raio da base  $r$ .

4. Suponha que uma dada população está dividida em dois grupos: aqueles que sofrem de uma certa doença infecto-contagiosa, e aqueles que não sofrem dessa doença mas que a podem contrair por contacto com uma pessoa infectada. Sabe-se que a taxa de propagação desta doença é directamente proporcional ao número de contactos entre gente infectada e gente sã. Suponha que os dois grupos convivem sem qualquer tipo de precaução.

- (a) Determine a equação diferencial que descreve a propagação desta doença.

- (b) Se 1/4 da população está infectada num determinado instante  $t = 0$ , esboce o gráfico da função que descreve a propagação da doença, a partir desse instante.

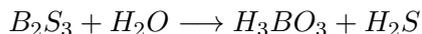
- (c) Quanto tempo decorrerá até que toda a população esteja doente?

5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} (1 + x^2)y' + 2xy &= (1 + x^2)x \\ y(0) &= 1 \end{cases},$$

com  $x \in [0, 1]$ .

6. O sulfureto de boro reage violentamente com a água para produzir ácido bórico e sulfureto de hidrogénio gasoso (o cheiro a ovos podres). A equação que descreve a reacção é:



Em que proporção devem os componentes ser misturados? (Nota: O número de átomos presentes mantém-se constante ao longo da reacção.)

7. A pressão sistólica  $p$  (em milímetros de mercúrio) de uma criança saudável com peso  $w$  (em quilogramas) é dada, de forma aproximada, pela equação  $p = a + b \ln w$ . Use os seguintes dados experimentais

$w$	20	28	37	51	59
$p$	91	99	104	108	111

para estimar a pressão sistólica de uma criança de 45 quilogramas.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ( $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ )
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln  f  + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C$ ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )
Primitiva de $f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Primitiva de $f' \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$