Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Biomatemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

10 de Fevereiro de 2010 Duração: 2,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. A concentração C de um composto químico na corrente sanguínea t horas após ter sido injectado no tecido muscular é
$$C(t) = \frac{3t}{27+t^3}, \qquad t \geq 0.$$
Determine o instante em que a concentração do composto é máxima.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) Se uma função é contínua num ponto, então é derivável nesse ponto.

   (b) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi} = 1.$

   (c) A matriz
   $$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
   é ortogonal, isto é, $A^{-1} = A^T$.

   (d) Se A é uma matriz invertível então, se $BA^{-1} = AC$ tem-se que $B = A^2C$.

3. (a) Calcule $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$, com a substituição $x = t^2$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen} x^3\,dx$.

   Nota: Pode necessitar da fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

   (c) Determine a área da região limitada pelas curvas $y = e^{-x}$, $y = e^{2x}$ e $y = e$.

   (d) Determine a natureza do integral
   $$\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x\,dx,$$
   justificando convenientemente a sua resposta.

4. Um modelo para o crescimento da biomassa (massa total dos membros da população) de atum do Pacífico, dada em quilogramas, é dado por
$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right), \tag{1}$$
onde t é medido em anos, $k = 0,71\%$ ao ano e a capacidade de suporte foi medida como sendo $S = 8 \times 10^7$ quilogramas.

   (a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ quilogramas, calcule a biomassa um ano depois.

   (b) Quanto tempo levará a biomassa a alcançar 4×10^7 quilogramas?

5. Determine a solução da equação diferencial
$$(x + x^3)y' = 1 + y + x^2y.$$

v.s.f.f.

6. Considere o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z+4t & = & 2 \\ 2y+6t & = & 2 \\ 4y+z-t & = & 2 \\ \beta y+3t & = & 1 \end{array}\right.$$

em que β é um parâmetro real.

(a) Discuta a natureza do sistema em função de β.

(b) Resolva o sistema para o caso em que $\beta = 0$.

7. Considere-se um teste mecânico para estabelecer a relação entre tensões e deformações relativas a uma amostra de tecido biológico (disco intervertebral) dado pela seguinte tabela

tensão σ (N/cm^2)	0,06	0,14	0,25	0,31	0,47	0,6
deformação ϵ	0,08	0,14	0,20	0,23	0,25	0,28

Usando a recta dos mínimos quadrados, obtenha uma estimativa para a deformação correspondente a uma tensão de $\sigma = 0{,}08$ N/cm^2.

Formulário	
Primitiva de $f^m\ f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
Primitiva de $\dfrac{f'}{f}$	$\ln\|f\| + C$
Primitiva de $a^f\ f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C\ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
Primitiva de $f'\ \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Primitiva de $f'\ \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
Primitiva de $\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$