Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Biomatemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

19 de Novembro de 2008 Duração: 1,5 horas

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. A tosse faz contrair a traqueia, o que afecta a velocidade do ar que passa por ela. A velocidade do ar durante a tosse é dada por
$$v(r) = k(R-r)r^2,$$
onde $k$ é uma constante, $R$ é o raio normal da traqueia e $r$ o raio da traqueia durante a tosse. Qual o valor de $r$ que produzirá a velocidade máxima de ar?

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
   (a) Se $f$ e $g$ são duas funções diferenciáveis tais que $f'(x) = g'(x)$, para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$, para $0 < x < 1$.
   (b) Para a função $f(x) = 5 + 3(x-1)^{2/3}$ tem-se que $f(0) = f(2)$ mas $f'(c) \neq 0$, para todo o $c \in ]0,2[$. Tal facto não contradiz o Teorema de Rolle.
   (c) Se concentração de um reagente, em gramas por litro, é descrita em função do tempo $t$, em minutos, por
   $$C(t) = \frac{t}{1+t^2/4},$$
   a taxa de variação da concentração ao fim de 1 minuto é de 1,25 gr $L^{-1}$ $min^{-1}$.
   (d) $\int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

3. Calcule o valor dos seguintes integrais:
   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln(\ln x)\,dx$;
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+2}\,dx$;
   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$, usando a mudança de variável $u = \sqrt{2x-1}$.

4. Determine a natureza do integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx,$$
usando a mudança de variável $x = \ln t$.

5. Determine a área da figura limitada por $y \geq -x+1$, $0 \leq y \leq e^x$ e $0 \leq x \leq 2$.

| Função | Primitiva |
|---|---|
| $f^m\ f'$ | $\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$ |
| $a^f\ f'$ | $\dfrac{a^f}{\ln a} + C\ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$ |
| $\dfrac{f'}{f}$ | $\ln\lvert f\rvert + C$ |
| $\dfrac{f'}{1+f^2}$ | $\text{arc tg}\, f + C$ |