Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Biomatemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

19 de Novembro de 2009 — Duração: 1,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende-se construir uma calha em forma de V utilizando duas chapas rectangulares de 1 metro de largura. Determine o ângulo entre as chapas que maximize a capacidade da calha.

   Nota: Pode necessitar da fórmula $\operatorname{sen} 2a = 2\cos a \operatorname{sen} a$.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1-e^x}{x^2} = 1$.

   (b) $x^3 - 3x + 3 = 0$ tem uma e uma só raiz real.

   (c) $\displaystyle\int_0^{10} e^{-st^2} t\,dt \leq 50$, qualquer que seja $s > 0$.

   (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-st^2} t\,dt = 0$, qualquer que seja $s > 0$.

3. Calcule o valor dos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$, usando a mudança de variável $u = \sqrt[6]{x}$.

4. Um médico prescreve uma dosagem de uma determinada substância química a ser administrada oralmente. A quantidade de substância química assimilada pelo organismo, mais a que foi eliminada pela urina, T horas após ter sido tomada, é dada por $\int_0^T E(t)\,dt$, onde E é a taxa de eliminação da substância. Considere
$$E(t) = \frac{t}{1+t^4},$$
   onde t é o tempo em horas.

   (a) Determine $I(T) = \displaystyle\int_T^{+\infty} E(t)\,dt$, e diga o que é que o integral representa.

   (b) Determine T por forma a que $I(T) < 0{,}001$.

5. Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região (finita) limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

Função	Primitiva
$f^m\ f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$a^f\ f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C\ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$