

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Os biólogos colocaram num lago 400 peixes e estimaram que a capacidade de suporte de peixes nesse lago como sendo 10000. O número de peixes triplicou no primeiro ano.
  - (a) Assumindo que o tamanho da população de peixes satisfaz a equação logística, encontre uma expressão para o tamanho da população depois de  $t$  anos.
  - (b) Quanto tempo levará a população a aumentar para 5000?
2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
  - (a) Qualquer que sejam as matrizes  $A$  e  $B$  invertíveis,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
  - (b) Qualquer que sejam as matrizes  $A$  e  $B$ ,  $(AB)^T = A^T B^T$ .
  - (c) A função  $y(t) = e^{-\sin t}$  é uma solução da equação diferencial  $y' = -y \cos t$ .
3. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' &= \frac{2x}{1-x^2}y + 2x, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

4. Em função do valor do parâmetro real  $p$ , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x - y + z &= p \\ py - z &= 1 \\ x + (p-1)y + (p-2)z &= p-2 \end{cases}.$$

5. O proprietário de uma empresa em rápido crescimento económico verificou que, nos primeiros seis anos, o lucro,  $L$ , da sua empresa em função do número de anos decorridos,  $N$ , poderia ser aproximado por uma transformação linear  $L = a + bN$ . Atendendo a que os resultados do seu negócio foram

$N$ (número de anos)	0	1	3	6
$L$ (lucro, em milhares de euros)	0	1	3	4

determine:

- (a) a recta dos mínimos quadrados para o problema descrito;
- (b) um valor para o lucro previsível no final do sétimo ano.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C$ ( $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ )
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln  f  + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$