

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. A taxa de propagação de um boato numa população é proporcional não apenas ao número  $y$  de pessoas que o ouviu mas também ao número de pessoas que ainda não o ouviu. Numa cidade com 1000 habitantes, 80 pessoas tinham ouvido o boato às 8h00 da manhã. Ao meio-dia metade da cidade já o tinha ouvido. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?
2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

- (a) Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$ , com  $AB = 0$  e  $0$  a matriz nula, então  $A = 0$  ou  $B = 0$ .
- (b) Qualquer que seja a matriz  $A$ , a matriz  $AA^T$  é simétrica.
- (c) A função  $y = -1/t$  é a solução da equação diferencial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad \text{com } y(1) = -1.$$

- (d) Se a matriz invertível  $A$  verifica  $A^2 - 3A + I = 0$ , em que  $I$  é a matriz identidade e  $0$  a matriz nula, então

$$A^{-1} = 3I - A.$$

3. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x, \\ y(\pi) = \pi^2. \end{cases}$$

4. Em função do valor do parâmetro real  $m$ , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x + y + (1 - m)z = 0 \\ -x + (1 + m)y + 2z = m + 2 \\ -mx + 2y + 3z = 2m + 2 \end{cases}.$$

5. O número de bactérias numa cultura varia de acordo com a seguinte tabela:

Tempo (em horas)	0	1	2	3
Bactérias (em milhares)	1	2	5	8

Determine:

- (a) a recta que melhor se ajusta aos dados, no sentido dos mínimos quadrados;
- (b) um valor para o número previsível de bactérias ao fim de 5 horas.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln  f  + C$
Primitiva de $f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$