1. Determine o domínio de definição das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (b) $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ (c) $= f(x) = \ln(x^2-4)$.

2. Determine, se possível, a inversa de cada uma das seguintes funções:

   (a) $y = 2x+3$; (b) $y = 2+\sqrt{x+1}$; (c) $y = \dfrac{2^x}{3} - 1$; (d) $y = \operatorname{arc\,tg} 3x$; (e) $y = \ln \dfrac{x}{2}$.

3. Simplifique as seguintes expressões, onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

   (a) $5^{2-\log_5 x}$; (b) $3^{2\log_3(x+1)}$; (c) $6^{3\log_6 2 - 2\log_6 3}$; (d) $a^{(2-\log_a x)/3}$;

   (e) $e^{-2\log x^2}$; (f) $a^{\log 2 + \log x}$; (g) $\log_4\left(4^x \cdot \sqrt[x]{4}\right)$; (h) $\log_{10} \dfrac{10^{(x+1)^2-x}}{\left(\frac{1}{10}\right)^x \cdot 100^{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}}$.

4. Resolva as seguintes equações:

   (a) $\log_3 x = \dfrac{1}{2} + \log_9(4x+15)$; (b) $e^{x+2} - 4x^2 e^x = 0$; (c) $2^{x^2-5x} = \dfrac{1}{64}$.

5. Investigue quais das funções são pares e quais são ímpares:

   (a) $y = \sin x^3$; (b) $y = e^{\cos x}$; (c) $y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ (d) $y = \cos(\sin(x))$.

6. Calcule a derivada da função $y = |x|$, para $x \neq 0$. Se $x = 0$, existirá a derivada?

7. Determine as derivadas das funções seguintes:

   (a) $y = \dfrac{5+6x}{1-x^6}$; (b) $y = \sqrt[6]{(x^2+1)^5}$; (c) $y = 6\,\mathrm{sen}\,(x+1) + 3\cos(7x)$; (d) $y = \cos(1+\,\mathrm{tg}\,x)$;

   (e) $y = a^x + x^{\ln x}$; (f) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$; (g) $y = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$.

8. Determine as derivadas das funções seguintes:

   a) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}\, x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ x + x^3, & \text{se } x < 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -2x-1, & \text{se } x \leq -1, \\ x^2, & \text{se } -1 < x < 0, \\ \mathrm{sen}\, x, & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x < 4, \\ 12-2x, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$

9. Considere as funções f, g e h tais que

   $$f(x) = 1 + |\,\mathrm{sen}\, x|,\ x \in [0, 2\pi],\ g(x) = \begin{cases} x + \ln(2-x), & \text{se } x < 1, \\ e^{1-x}, & \text{se } x \geq 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Mostre que as funções dadas são contínuas, mas não deriváveis em alguns pontos.

10. Determine os valores máximo e mínimo das funções abaixo definidas, no intervalo indicado.

    (a) $f(x) = 1 - x^2,\ x \in [0,1]$; (b) $f(x) = |x|,\ x \in [-1,1]$; (c) $f(x) = \mathrm{sen}\, x,\ x \in [0,2]$.

11. Averigúe se as funções a seguir indicadas têm algum extremo relativo para $x = 2$:

    (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2, \\ 4, & \text{se } x = 2, \\ x+5, & \text{se } x > 2; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2, \\ 1, & \text{se } x = 2, \\ -x^2+8, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

12. A eficácia de determinado analgésico t horas após ter sido ministrado (tomado) pode ser significativamente bem modelada pela seguinte função $E(t) = \dfrac{1}{27}\left(9t + 3t^2 - t^3\right)$, $0 \leq t \leq 5$. Determine a taxa de alteração de E relativamente a t nos seguintes casos: passada 1 hora; passadas 4 horas.

13. A variação da temperatura (em graus Farenheit) de um dado alimento num frigorífico pode ser bem modelada pela seguinte função:

    $$T(t) = 10\frac{4t^2 + 16t + 75}{t^2 + 4t + 10},\ t > 0,$$

    onde t representa o tempo decorrido em horas.

(a) Qual é a temperatura inicial do alimento?

(b) Qual a temperatura limite a que poderá chegar o alimento se se deixar indefinidamente no frigorífico?

(c) Determine a taxa de alteração de T para $t = 10$ horas.

14. A concentração $[S]$ de uma certa substância durante uma reacção enzimática é dada por $[S] = [S_0]e^{-\frac{k}{2.3}t}$ onde t é o tempo decorrido em segundos, k é uma constante e $[S_0]$ é a concentração da substância no início da reacção.

    (a) Arbitrando valores para $k > 0$ e $[S_0]$ trace um gráfico de $[S]$ em função de t.

    (b) Mostre que usando uma mudança de variáveis conveniente se obtém um modelo linear simples (expresso por uma função cujo esboço do gráfico é uma recta).

15. Pensa-se que uma quantidade que está a ser objecto de estudo cresce exponencialmente com o tempo. Várias medições deram os seguintes resultados:

Tempo (em minutos)	0	1	2	3	4	5
Quantidade	2	15	111	844	6328	47461

    Será de facto um crescimento exponencial? (Sugestão: procurar uma função definida por uma expressão da forma $ce^{\alpha t}$ onde c e α são constantes a determinar.)

16. Para temperaturas t (em $°C$) no intervalo $[-50, 150]$ a pressão P de uma botija de gás varia com a temperatura segundo uma lei do tipo $P(t) = Mt + b$, onde M e b são constantes. Suponha que um aumento de 40 graus na temperatura causa um aumento na pressão na ordem dos 50 milibares.

    (a) Qual a taxa de variação da pressão em relação à temperatura?

    (b) Que mudança de temperatura provocaria uma queda de pressão da ordem de 9 milibares?

17. Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é dada por $I = V/(R + r)$. Se a força resultante é dada por $P = I^2R$, mostre que a força máxima ocorre se $R = r$.

18. Um fabricante de frascos tem um custo de produção diário $c(x) = 180 - 10x + \frac{1}{4}x^2$, em que x representa o número de frascos produzidos. Quantos frascos deverá fabricar por dia, por forma a minimizar o custo?

19. Para $f(x) = |x|$, mostre que $f(-1) = f(1)$, mas $f'(c) \neq 0$ para todo o c no intervalo $]-1, 1[$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?

20. Use o Teorema de Rolle e o Teorema de Bolzano para provar que: $f(x) = x^3 + 3x + 2$ tem um só zero real; $f(x) = x^3 - 3x + 1$ tem três zeros reais.

21. Determine o domínio de definição, o domínio de continuidade e a segunda derivada da função:

$$f(x) = \begin{cases} -23 + 4\log_{e^2}|x + 6|, & \text{se } x > -5, \\ 23 \text{ tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4} + 5\right) - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{235}{2} - 26x, & \text{se } x \leq -5. \end{cases}$$

22. Represente graficamente as seguintes funções:

    (a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$; (b) $y = 3x^3 - 9x + 1$; (c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$; (d) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$.

23. Determine:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2 \text{sen}^2 \frac{1}{x}}$

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}\, x}\right)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\text{sen}\, x)^{\text{tg}\, x}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 - \text{sen}\, x)^{1/x}$.

24. Verificando que não pode usar a regra de L'Hospital, calcule os seguintes limites:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \cos x}{x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \,\text{sen}\, \frac{1}{x}}{x}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \text{sen}\, x}{x + \text{sen}\, x}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \,\text{sen}\, \frac{1}{x}}{\text{sen}\, x}$.

25. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$. Indique o domínio de f e mostre que f é ímpar. Será injectiva? Esboce o gráfico da restrição de f a $]-\infty, 0[$ e, usando o facto de f ser ímpar, complete o gráfico de f.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Biomatemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

Folha 2 — Ano lectivo 2008/09

26. Sejam F e G primitivas de f e g, respectivamente. É verdade que:
    (a) $F+G$ é uma primitiva de $f+g$?
    (b) FG é uma primitiva de fg?
    (c) F/G é uma primitiva de f/g?

27. Seja F uma primitiva de f. Prove que:
    (a) se F é uma função par, então f é uma função ímpar;
    (b) se F é uma função ímpar, então f é uma função par.

28. Calcule as primitivas das funções indicadas:

(a) $\operatorname{sen} x + \dfrac{3}{1+x^2}$; (b) $(a+bx^3)^2$; (c) $\dfrac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$; (d) $\dfrac{\ln x}{x}$;

(e) $\dfrac{e^{\operatorname{arc\,tg} x} + x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}$; (f) $\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$; (g) $\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x}$; (h) 4^{2-3x};

(i) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$; (j) $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}$; (k) $e^{\operatorname{tg} x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$; (l) $e^{4x+x^2+3}(x+2)$;

(m) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$; (n) $\dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$; (o) $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}$; (p) $\dfrac{1}{9+4x^2}$;

(q) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$; (r) $\dfrac{x^3}{x^8+5}$; (s) $\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$; (t) $a^x\cos(a^x)$;

(u) $\operatorname{sen}(\cos x)\operatorname{sen} x$; (v) $x\sec^2\left(3-2x^2\right)$; (w) $\dfrac{x}{\cos^2 x^2}$; (x) $\operatorname{cosec}^2\left(\sqrt{3}x+5\right)$;

(y) $x\operatorname{cosec}^2\left(3x^2\right)$; (z) $\dfrac{1}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$; ($\alpha$) $\sqrt{2}x\sec\left(5x^2+7\right)$; ($\beta$) $a^{2x}\operatorname{cosec}\left(a^{2x}\right)$;

(γ) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right)}$; ($\delta$) $\dfrac{2x^3}{\operatorname{sen}^2(3x^4)}+\sec^2(5x)$.

29. Calcule, utilizando o método de primitivação por partes, as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $e^{3x}(2x+3)$; (b) $(\ln x)(2x+3)$; (c) $x^2\ln x$; (d) $e^x\operatorname{sen} x$; (e) $e^{ax}\operatorname{sen} bx$; (f) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$;

(g) $x\cos x$; (h) $x\sec^2 x$; (i) $(1-x)e^{1+2x}$; (j) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; (k) $\ln(x+1)^2$; (l) $\ln\left(a^2+x^2\right)$;

(m) $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$; (n) $\operatorname{sen}(\ln x)$; (o) $\cos(\ln x)$; (p) $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$; (q) $\sec^3 x$; (r) $x\operatorname{sen} x\cos x$.

30. Calcule, utilizando o método de substituição, as primitivas de:

(a) $x^2\sqrt{4-x^2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; (c) $\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)^2}{e^x+1}$;

(d) $\dfrac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}$; (e) $\dfrac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}}$; (f) $\dfrac{1}{3+2\cos x}$.

31. Determine uma função F tal que $F''(x)=2x^{-1}$, $F'(1)=3$ e $F(1)=0$.

32. Para cada uma das funções definidas em $\mathbb{R}$ pelas expressões

$$\cos(2x-\frac{\pi}{4}) \quad \text{e} \quad \frac{x}{1+x^4}$$

obtenha, se possível,

(a) a primitiva que se anula em $x=0$;
(b) a primitiva que tende para 1 quando x tende para $+\infty$;

Se para algum caso for impossível obter uma primitiva que verifique a condição requerida, explique a razão dessa impossibilidade.

33. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o valor do integral definido, identificando-o com uma área que indicará:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (2x+6)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (7-3x)\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$.

34. Mostre que, se f é integrável em $[-a,a]$, então

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, se f é par;

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, se f é ímpar.

Faça uma interpretação geométrica destes resultados.

35. Aplicando o exercício anterior, mostre que são nulos os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{x^4+1}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x.\operatorname{sen}^2 x\,dx$.

36. Calcule os seguintes integrais definidos:

(a) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{1-4x^3}{x-x^4}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\operatorname{arc\,tg} x^2\,dx$; (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln\left(\ln x^2\right)}{x}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx$; (h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$; (i) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2x^2-x+1}{3(x+1)(x^2+1)}\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\operatorname{sen} 2x\,dx$; (k) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\,dx$; (l) $\displaystyle\int_{0}^{8} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,dx$;

(m) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(3x+\left|x^2-4x-5\right|\right)\,dx$; (n) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$; (o) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$;

(p) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\,dx$; (q) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$.

37. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\cos x|\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,|x|\,dx$.

38. Calcule

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

usando a mudança de variável $x = \operatorname{tg} t$.

39. Seja f uma função integrável no intervalo $[a,b]$. Sejam m e M, respectivamente, um minorante e um majorante da função f no intervalo $[a,b]$. Prove que

$$m(b-a) \leq \int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

40. Mostre que se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então

$$-2\pi \leq \int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx \leq 2\pi.$$

41. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_{0}^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^4}$.

42. Determine uma função f contínua e uma constante α de modo que, para todo o x real, se tenha:

(a) $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$; (b) $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \cos(2x)+1$.

43. Determine uma função contínua f de modo que $\displaystyle 3\int_{0}^{x} f(t)\,dt = x\,f(x)$ e $f(1)=2$.

44. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, calcule as derivadas das funções a seguir definidas:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,dt,\ x>0$; (b) $\displaystyle\int_{2}^{x} \frac{\cos y}{y}\,dy,\ x>0$; (c) $\displaystyle\int_{1}^{\ln x} \operatorname{sen}\left(y+e^y\right)dy,\ x>0$.

61. Quais dos seguintes símbolos representam integrais impróprios, quais representam integrais definidos e quais não representam nem uma coisa nem outra?

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2-u}\,du$; (g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2-4}\,dx$.

62. Averigue a natureza dos seguintes integrais e indique os seus valores no caso de serem convergentes:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{4/5}}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$; (g) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (h) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$; (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$; (j) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

63. Estude a convergência de cada um dos seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$; (Sugestão: $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ para x "grande".)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+e^x}\,dx$; (Sugestão: $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+e^x}\right| \leq \dfrac{1}{e^x}$.)

(c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$. (Sugestão: $\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$.)

64. Determine a medida da área da região limitada:

(a) pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;
(b) pelas curvas $y=\sin x$ e $y=\cos x$ entre dois pontos consecutivos das suas intersecções;
(c) por $x=4-y^2$ e o eixo dos yy;
(d) pela curva $y=\ln x$, o eixo dos yy e as rectas $y=0$ e $y=2$.

65. Calcule a medida do volume do sólido de revolução gerado:

(a) pelo semi–círculo $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leq x\leq r$, em torno do eixo dos xx;
(b) pela região $y\leq x^2 \wedge 0\leq x\leq 2 \wedge y\geq 0$, em torno do eixo dos xx;
(c) pela região limitada pela curva $y=x^3$, as rectas $y=1$ e $y=0$ e o eixo dos yy, em torno do eixo dos yy;
(d) pela região limitada pela curva $y=x^3$, a recta $x=1$ e o eixo dos xx, em torno do eixo dos yy;
(e) pela rotação em torno do eixo dos xx da região dada pela condição $(x-1)^2+y^2\leq 1 \wedge x-y-1\geq 0 \wedge y\geq 0$.

66. Calcule o comprimento da curva:

(a) $y=x$ entre os pontos de abcissas $x=a$ e $x=b$ (com $a<b$);
(b) $x^2+y^2=r^2$;
(c) $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ entre as rectas $x=0$ e $x=4$;
(d) $y=\sin x$ para $0\leq x\leq \pi$.

67. Um fluido escorre para dentro de um tanque à velocidade de $2t+3$ litros por minuto, onde t é o tempo medido em horas depois do meio-dia. Se o tanque estiver vazio ao meio-dia e tiver a capacidade de 1000 litros, a que horas estará cheio?

68. A densidade de massa de um fio é $f(x)=x^2e^{-x}$ quilogramas por centímetro. O fio tem 2 metros de comprimento. Calcule a sua massa sabendo que ela é dada por $M=\int_0^{200} f(x)\,dx$.

69. Quando um gás se expande num cilindro de raio r, a pressão num dado momento é função do volume: $P = P(V)$. A força exercida pelo gás no pistão (ver figura) é dada pelo produto da pressão pela área: $F = \pi r^2 P$.

   (a) Mostre que o trabalho produzido pelo gás quando o volume expande de V_1 para V_2 é dado por $W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$.

   (b) Numa máquina a vapor a pressão P e o volume V de vapor satisfazem a equação $PV^{1{,}4} = k$, onde k é uma constante. (Isto é verdade para uma expansão adiabática, que é uma expansão onde não ocorre transferência de calor entre o cilindro e o seu exterior). Use a alínea anterior para calcular o trabalho realizado pelo motor num ciclo quando o vapor começa a uma pressão de 72 Kgf/cm^2 e um volume de 100 cm^3 e expande até um volume de 800 cm^3.

70. Uma partícula de massa m movendo-se num fluido está sujeita a uma resistência de viscosidade R, que é função da velocidade v. A relação entre a resistência R, a velocidade v e o tempo t é dada pela equação

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\, du.$$

Suponhamos que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para um fluido particular, onde R é dado em newtons e v em metros/segundo. Se $m = 10$ kg e $v(0) = 10$ m/seg calcule o tempo necessário para a partícula reduzir a sua velocidade para $v = 5$ m/seg.

71. No método da diluição do contraste, usado para medir a capacidade cardíaca, introduz-se uma substância (contraste) na corrente sanguínea e uma sonda na aorta para medir a concentração de contraste que sai do coração em intervalos de tempo regulares, durante o intervalo $[0, T]$, até que o contraste esteja terminado. A capacidade cardíaca do coração (volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo), será dada por

$$\frac{A}{\int_0^T c(t)\, dt},$$

onde A é a quantidade de contraste (mg) introduzido e $c(t)$ a concentração de contraste (mg/L) no instante t. Calcule a capacidade cardíaca quando $A = 8$ mg e $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$ mg/L, com $0 \leq t \leq 12$.

72. Uma substância radioactiva decai exponencialmente. Assim, a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k uma constante negativa. A "vida média" de um átomo na substância é dada por

$$M = -k \int_0^{\infty} t e^{kt}\, dt.$$

Para o isótopo radioactivo de carbono ^{14}C, usado na datação, o valor de k é -0.000121. Calcule a vida média de um átomo de ^{14}C.

73. A "velocidade média" das moléculas de um gás ideal é dada por

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\, dv,$$

onde M é o peso molecular do gás, R a constante do gás, T a temperatura do gás e v a velocidade molecular. Mostre que $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$.

74. Considere as seguintes regras numéricas de integração ($\Delta x = (b - a)/n$):

Ponto médio: $\int_a^b f(x)\, dx \approx \Delta x[f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \cdots + f(\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}) + f(\frac{x_{n-1}+x_n}{2})]$;

Trapézios: $\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$.

Considerando $n = 10$, calcule o valor aproximado dos seguintes integrais, comparando o resultado com a solução exacta: (a) $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$; (b) $\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$; (c) $\int_0^2 x^3\, dx$.

75. A intensidade de luz com comprimento de onda λ viajando através de uma grelha de difracção com n aberturas a um ângulo θ é dada por $I(\theta) = (n/k)^2 \operatorname{sen}^2 k$, onde $k = (\pi n d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ e d é a distância entre cada abertura. Um laser de hélio-néon com comprimento de onda $\lambda = 632{,}8 \times 10^{-9}$ m emite uma banda estreita de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, através de uma grelha com 10.000 aberturas separadas por 10^{-4} m. Obtenha um valor aproximado para a intensidade de luz total que sai da grelha $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta$.

76. A função $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ é usada com muita frequência em disciplinas tão diversas como a teoria das probabilidades, distribuição de calor, difusão de matérias, etc. Usando uma das regras de integração com $n = 10$, calcule uma aproximação para o valor do referido integral.

77. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine, usando o método de Euler, o valor aproximado de $y(0.4)$, fazendo $h = 0.4$, $h = 0.2$ e $h = 0.1$. Compare os resultados obtidos com a solução exacta.

78. Use o método de Euler com passo 0.5 para calcular os valores aproximados de y_1, y_2, y_3 e y_4 para a solução do problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= 1+3x-2y \\ y(1) &= 2 \end{cases}$, em $y(1+0.5i)$, com $i = 1, 2, 3, 4$.

79. Use o método de Euler com passo 0.2 para estimar $y(1)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de condição inicial $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.

80. Use o método de Euler com passo 0.1 para estimar $y(0.5)$, onde $y(x)$ é a solução do problema de condição inicial $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

81. Seja dado o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{2}{t}y + t^2e^t \\ y(1) &= 0 \end{cases}$, com $t \in [1, 2]$, cuja solução exacta é $y(t) = t^2(e^t - e)$. Use o método de Euler com $h = 0.2$ para aproximar a solução e compare-a com a solução exacta.

82. Considere o problema de condição inicial $y' = -y \cos t$, $y\,(0) = 1$, com $t \in [0, 1]$.
    (a) Mostre que $y\,(t) = e^{-\operatorname{sen} t}$ é a solução exacta deste problema.
    (b) Determine a solução aproximada deste problema em $t = 1$, usando o método de Euler com $h = 0.5$. Compare os resultados que obteve com a solução exacta.

83. Num circuito de voltagem aplicada E, resistência R, inductância L e capacitância C em paralelo, a corrente I satisfaz a equação diferencial
$$I' = CE'' + \frac{E'}{R} + \frac{E}{L}.$$
Suponha que $C = 0.3$ farad, $R = 1.4$ ohm, $L = 1.7$ henry e a voltagem é dada pela equação $E(t) = e^{-0.06\pi t}\operatorname{sen}(2t - \pi)$. Se $I(0) = 0$, determine o valor da corrente I para $t = 0.2j$, para $j = 1, \ldots, 5$, usando o método de Euler.

84. Um projéctil é lançado da superfície terreste com uma velocidade V. Supondo que não há arrasto a equação do movimento é
$$\nu\frac{d\nu}{dr} = -g\frac{R^2}{r^2},$$
onde ν é a velocidade à distância r do centro da Terra que tem raio R. Considerando $g = 9.81$ m/s^2, $R = 6.37\times10^6$ m e $V = 15000$ m/s, aproxime o valor da velocidade quando $r = 2R$, usando o método de Euler com passo $R/4$.

85. Uma solução líquida flui de forma constante ao longo de um tubo na direcção x. Alguns dos solutos contidos na solução difundem-se através da parede do tubo reduzindo a concentração z no tubo. A concentração z é dada por
$$\frac{dz}{dx} = -z(0.2 + \sqrt{z})e^{-0.03x}.$$
Se tomarmos $z = 1.5$ em $x = 2$ aproxime o valor de z em $x = 2.4$ usando o método de Euler com passo 0.2.

86. A equação química irreverssível na qual duas moléculas de dicromato de potássio ($K_2Cr_2O_7$) sólido, duas moléculas de água (H_2O) e três átomos de enxofre (S) sólido dão origem a três moléculas de dióxido de enxofre (SO_2) gasoso, quatro moléculas de hidróxido de potássio (KOH) sólido e duas moléculas óxido de crómio (Cr_2O_3) sólido pode ser representada, simbolicamente, pelo esquema
$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \longrightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2.$$
Se existirem inicialmente n_1 moléculas de $2K_2Cr_2O_7$, n_2 moléculas de H_2O e n_3 moléculas de S a equação seguinte descreve a quantidade $x(t)$ de KOH ao fim de um tempo t (em segundos)
$$x' = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3,$$
onde k é a velocidade da reação (constante). Se $k = 6.22 \times 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 1000$ e $n_3 = 1500$, determine um valor aproximado para unidades de hidróxido de potássio formadas ao fim de 2 segundos, usando o método de Euler com passo igual a meio segundo.

87. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis:

   (a) $(1+t)\dfrac{dy}{dt} - y = 0$; (b) $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{y}$, $y(4) = 3$; (c) $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 4$; (d) $e^t \dfrac{dy}{dt} = 2t$;

   (e) $(4y + yt^2)dy - (2t + ty^2)dt = 0$; (f) $\operatorname{sen} x \cos y y' + \cos x \operatorname{sen} y = 0$; (g) $-x + yy' = 0$.

88. Uma cultura tem inicialmente um número N_o de bactérias. No instante $t = 1$ hora, o número de bactérias é $\frac{3N_o}{2}$. Supondo que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

89. Um tanque tem 1000 litros de água pura. Em cada minuto, uma torneira A despeja 5 litros de água salgada com 0.05 Kg de sal por litro de água e uma torneira B despeja 10 litros de água salgada com 0.04 kg de sal por litro de água. A solução é completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 litros por minuto. Indique a quantidade de sal que está no tanque após t minutos.

90. Um certo medicamento é usado para tratar sintomas de angina crónica e hipertensão. Como bloqueador dos canais de cálcio, este fármaco faz aumentar o aporte de oxigénio ao miocárdio e simultaneamente diminui a necessidade geral de oxigénio no organismo. Isto é conseguido através da redução do batimento cardíaco e expansão do volume do sistema circulatório, o que, por sua vez, provoca uma diminuição da tensão arterial. Testes experimentais mostram que a meia-vida do referido medicamento, no interior do corpo humano, é de 20 horas. Admita que a taxa de absorção de um medicamento pelo organismo, num dado instante, é proporcional à quantidade de medicamento presente no organismo nesse instante.

    Supondo que uma certa dose é administrada de uma só vez a um paciente, escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação do medicamento no seu organismo e determine a constante de proporcionalidade. Determine a solução da equação diferencial.

91. Um estudante portador do vírus da gripe regressa a um colégio com 1000 alunos. Suponha que o colégio está isolado e que o vírus se propaga com uma taxa de variação proporcional não apenas ao número y de alunos já infectados mas também ao número de alunos não infectados.

    (a) Determine o número de alunos infectados após 6 dias, sabendo que passados 4 dias eles são já 50.

    (b) Calcule o valor limite da função $y(t)$, quando t tende para $+\infty$.

92. Descobriu-se um osso fossilizado com $\frac{1}{1000}$ da quantidade original de carbono 14. Sabendo que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, determine a idade do fóssil. Admita que a taxa de desintegração (ou decaimento) do carbono 14 é proporcional à massa existente em cada instante.

93. A população de um país foi de 12100000 em 1996 e de 13268000 em 2000. Supondo que a taxa de crescimento é directamente proporcional ao tamanho da população, estime o tamanho da população em 2005, 2006 e 2007.

94. Para que um fármaco possa ser devidamente administrado, é necessário que se conheça o modo como actua no organismo e, em particular, a forma como é absorvido. A relação dose/resposta do organismo, estabelece uma regra vital na determinaçao da quantidade a administrar em cada dose e do intervalo de tempo entre doses sucessivas.

    Testes experimentais a determinado tipo de antibióticos, permitiram concluir que a taxa de variação da concentração destes fármacos na corrente sanguínea, num determinado instante de tempo, é proporcional à sua concentração nesse mesmo instante. Suponha que $y(t)$ representa a concentração deste tipo de antibióticos no organismo (isto é, o número de unidades por mililitro de sangue) no instante t.

    (a) Escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação destes antibióticos no organismo.

    (b) Há vários métodos para combater uma determinada infecção. Em situações graves é necessário um tratamento de choque, que consiste em administrar ao paciente várias doses, igualmente espaçadas no tempo, a primeira das quais já tem a concentração máxima requerida C_m e as seguintes permitem apenas corrigir desvios a este valor devidos à perda de concentração por eliminação.

       i. Determine a concentração de antibiótico após um tempo prescrito T, depois da administração da primeira dose.

       ii. Se uma segunda dose é administrada nesse instante T, qual deve ser a sua concentração, de forma a repôr de imediato a concentração inicial C_m?

       iii. Supondo que este procedimento se repete nos instantes $2T$, $3T$,$4T$, faça um esboço do gráfico da função y no intervalo $[0, 4T]$.

       iv. Determine o tempo que decorre desde a administração da última dose até que todo o medicamento desapareça da corrente sanguínea, sabendo que a sua meia-vida, enquanto no organismo, é de 30 minutos.

95. Suponha que uma dada população está dividida em dois grupos: aqueles que sofrem de uma certa doença infecto-contagiosa, e aqueles que não sofrem dessa doença mas que a podem contrair por contacto com uma pessoa infectada. Sabe-se que a taxa de propagação desta doença é directamente proporcional ao número de contactos entre gente infectada e gente sã. Suponha que os dois grupos convivem sem qualquer tipo de precaução.

    (a) Determine a equação diferencial que descreve a propagação desta doença.

    (b) Se $1/4$ da população está infectada num determinado instante $t = 0$, esboce o gráfico da função que descreve a propagação da doença, a partir desse instante.

    (c) Quanto tempo decorrerá até que toda a população esteja doente?

96. Suponha que uma população y evolui de acordo com a equação logística

$$\frac{dy}{dt} = 0.05y - 0.005y^2,$$

onde t é medido em semanas. Determine a capacidade de suporte da população e valor da sua taxa de crescimento.

97. Suponha que o modelo de crescimento de uma população y é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3y}{20} - \frac{y^2}{1600}.$$

Considerando $y(0) = 15$, determine o número de indivíduos da população no instante $t = 10$.

98. Um modelo para o crescimento da biomassa (massa total dos membros da população) de atum do Pacífico, dada em quilogramas, é dado por

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right), \tag{1}$$

onde t é medido em anos, $k = 0,71\%$ ao ano e a capacidade de suporte foi medida como sendo $S = 8 \times 10^7$ quilogramas.

    (a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ quilogramas, calcule a biomassa um ano depois.

    (b) Quanto tempo levará a biomassa a alcançar 4×10^7 quilogramas?

99. (a) Mostre que se y satisfizer a equação logística (1), então

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2y\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{2y}{S}\right).$$

    (b) Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade da sua capacidade de suporte.

100. Para algumas espécies existe uma população mínima m tal que as espécies se tornam extintas quando o tamanho da população é inferior a esse valor. Nesse caso, o modelo logístico deve ser substituído por

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{m}{y}\right), \qquad y(0) = y_0.$$

    (a) Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < y < S$ e decrescente se $0 < y < m$.

    (b) Resolva o problema de condição inicial.

    (c) Mostre que se $y_0 < m$ as espécies se tornarão extintas.

101. Num modelo de crescimento sazonal, uma função periódica no tempo é introduzida para considerar as variações na taxa de crescimento. Esse modelo pode ser traduzido pelo problema de condição inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky\cos(rt - \phi), \qquad y(0) = 0,$$

onde k, r e ϕ são constantes positivas. Determine a solução do modelo de crescimento sazonal.

102. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

(a) $t\dfrac{dy}{dt} - 4y = t^6$; (b) $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t$; (c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+t}{t}$;

(d) $\dfrac{dy}{dt} = y + t$; (e) $dy + (y\cos x - e^{-\operatorname{sen} x})dx = 0$; (f) $t^2y' + t(t+2)y = e^t$;

(g) $y' - \dfrac{1}{x}y = x + \dfrac{x}{1+x^2}$; (h) $t^2y' + t(t+3)y = e^{-t}$; (i) $y' + (\cos x)\, y = x^2\, e^{-\operatorname{sen} x}$.

103. Uma equação de Bernoulli (em homenagem a James Bernoulli (1654-1705)) é da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

com n um número inteiro. Obserque que, se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x).$$

104. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

(a) $xy' + y = -xy^2$; (b) $y' + y = xy^3$; (c) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$.

105. A Lei de Arrefecimento de Newton diz que taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considere uma esfera de metal aquecida a 100^o e que é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 30^o$. Ao fim de cinco minutos a temperatura da esfera desceu para 60^o. Determine:

(a) a temperatura da esfera ao fim de meia-hora;

(b) o instante em que a temperatura da esfera atinge 31^o.

106. Às 23 horas John foi encontrado morto no seu apartamento. Claxon chegou ao local do crime às 23h30m e tirou imediatamente a temperatura da vítima: 30^o. Uma hora depois, (às 0h30m) a temperatura do corpo era de 25^o. Claxon notou ainda que a temperatura da sala se mantinha constantemente igual a 20^o. A que hora ocorreu o crime?

107. A Ana pesa 60 quilogramas e está a fazer uma dieta de 1600 calorias por dia, das quais 850 são usadas directamente no metabolismo basal. Mais, a Ana gasta cerca de 15 calorias por dia e por quilograma do seu peso a fazer exercício físico.

(a) Supondo que um quilograma de gordura tem 10000 calorias e que a reserva de calorias na forma de *gordura* é 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a de forma a conhecer o peso da Ana em função do tempo.

(b) Será que o peso da Ana vai chegar ao peso de equilíbrio?

108. Um circuito eléctrico simples consiste num medidor de corrente eléctrica I (em amperes), uma resistência R (em ohms), um inductor L (em henries) e uma voltagem aplicada E (em volts). Pela segunda Lei de Kirchoff, a corrente I satisfaz

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

(a) Determine a corrente I em função do tempo t (medido em segundos), sabendo que $E(t) = 40\operatorname{sen} 60t$ V, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$ e $I(0) = 1$ A.

(b) Calcule a corrente ao fim de 0.1 segundos.

109. Um tanque contém 100 litros de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0.4 kg/l é adicionada a uma taxa de 5 l/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 l/min. Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) ao fim de t minutos.

(a) Tendo em conta que o volume do fluido no tanque não permanece constante ao longo do tempo, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100+2t}.$$

(b) Resolva a equação diferencial e calcule a concentração ao fim de 20 minutos.

110. Resolva os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação de Gauss, registando os pivots utilizados:

(a) $\begin{cases} 3x-y+z &= -1 \\ 9x-2y+z &= -9 \\ 3x+y-2z &= -9 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2x-3y+z &= 1 \\ -4x-6y+z &= -2 \\ 12x-18y+z &= -6 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} -x-y+2z &= -5 \\ -3x-y+7z &= -22 \\ x-3y-z &= 10 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y+z &= 4 \\ x+z+t &= -4 \\ z+t+u &= 2 \\ t+u &= -1 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x+y+z+t &= 1 \\ x+y+3z+2t &= 3 \\ 3x+5y+7z+3t &= 0 \\ 3x+5y+9z+4t &= 2 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} 5x-z &= 0 \\ 4x+2y+z &= 1 \\ 3x-y+3z &= -1 \end{cases}$.

111. Determine $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema $\begin{cases} \beta x-y+\beta z &= 0 \\ -2\beta y-2z &= 0 \\ x-y+\beta z &= 0 \end{cases}$ admita somente a solução trivial.

112. Encontre os valores do parâmetro k para os quais o sistema $\begin{cases} x-2y+3z &= 1 \\ 2x+ky+6z &= 6 \\ -x+3y+(k-3)z &= 0 \end{cases}$ tem:

(a) uma solução; (b) nenhuma solução; (c) uma infinidade de soluções.

113. Em função do valor do parâmetro real p, discuta a natureza do sistema $\begin{cases} x+y+z &= p+1 \\ x+py+z &= 1 \\ px+y &= p+2p^2 \end{cases}$.

114. Determine o parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema $\begin{cases} x+y+\alpha z &= 2 \\ 2x+y+z &= \alpha \\ x+2y-z &= 1 \end{cases}$ seja impossível.

115. Podemos misturar, sob certas condições, tolueno C_7H_8 e ácido nítrico HNO_3 para produzir trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ (vulgarmente conhecido por TNT) juntamente com um derivado, a água. Em que proporção devem os componentes ser misturados? (Nota: O número de átomos presentes mantém-se constante ao longo da reacção.)

116. As soluções (x, y, z) da equação $ax+by+cz = 0$ formam um plano em $\mathbb{R}^3$, quando a, b e c não são simultaneamente nulos. Dê exemplo de um sistema de 3 equações cujo conjunto solução seja:

(a) uma recta; (b) vazio; (c) um ponto.

117. Consideremos um corpo a deslocar-se horizontalmente de acordo com a equação $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, em que s é o deslocamento relativamente a um certo ponto fixo (medido em metros), s_0 o deslocamento inicial, v_0 a velocidade inicial, a a aceleração e t o tempo (medido em segundos). Determine os valores de s_0, v_0 e a, supondo que nos instantes $t = 1, 2, 3$ segundos, o corpo se encontrava, respectivamente, em $s = 2, 5, 9$ metros.

118. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine $A+B$, $2A$, $A-B$ e $-3B$.

119. Calcule os produtos AB e BA nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

120. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Indique A^T, B^T e C^T. (b) Calcule $3A-4B$, BC, $(AC)^T$ e C^TC. (c) Pode calcular AB? Justifique.

121. Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$ para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

122. Suponhamos que A é uma matriz 3 por 5, B é 5 por 3, C é 5 por 1 e D é 3 por 1. Diga em que casos as operações estão definidas e de que tipo é a matriz resultante.

(a) BA; (b) $A(B+C)$; (c) ABD.

123. Que linhas e colunas das matrizes A e B deve multiplicar para obter:

(a) a 3ª coluna de AB; (b) a 1ª linha de AB; (c) o elemento de AB situado na linha 3 e coluna 4.

124. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $B^2 - 4B - 12I_2 = 0_2$ (b) Determine $X = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ tal que $BX = 6X$.

125. Encontre uma matriz A, não nula, e duas matrizes B e C para as quais $AB = AC$ mas $B \neq C$.

126. Um vector com entradas não negativas e não superiores a 1 é chamado um vector probabilidade. Uma matriz estocástica é uma matriz cujas colunas são vectores probabilidade. Uma cadeia de Markov é uma sequência de vectores probabilidade $x_0, x_1, \ldots$, juntamente com uma matriz estocástica P, tais que $x_{k+1} = Px_k$, $k = 0, 1, \ldots$. De acordo com isto, considere a seguinte situação: num determinado dia, um estudante ou está saudável ou está doente. Dos estudantes que estão bem hoje, 95% continuarão bem amanhã. Dos estudantes que estão doentes hoje, 55% continuarão doentes amanhã.

(a) Construa a matriz estocástica para este problema.

(b) Suponha que 20% dos estudantes estão doentes na segunda-feira. Qual a percentagem de estudantes que provavelmente estarão doentes na terça-feira?

(c) Se um estudante está bem hoje, qual a probabilidade de assim continuar passados 2 dias?

127. Durante uma epidemia, a probabilidade de transição para o estado saudável ou doente no dia seguinte é dada pela seguinte matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/8 \\ 3/8 & 7/8 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o que foi dito no problema anterior, podemos interpretar a matriz T do seguinte modo: os elementos da 1ª coluna são, respectivamente, as probabilidades de no dia seguinte uma pessoa saudável permanecer saudável ou de adoecer; os elementos da 2ª coluna representam as probabilidades de uma pessoa doente se curar ou permanecer doente, respectivamente.

Num certo dia, a população de uma aldeia é constituída por 1536 pessoas saudáveis e 512 doentes. Quantas pessoas doentes haverá três dias depois? O que acontecerá se inicialmente a relação entre saudáveis e doentes for de 1 para 3?

128. A seguinte matriz de transição de estados

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

caracteriza a variação anual das 3 fases *larva*, *crisálida* e *adulto* no ciclo de vida de um insecto. Mostre que após 3 anos, a população total duplica e que a proporção entre as várias fases do ciclo é igual à do estado inicial.

129. Uma empresa fabrica três produtos. As despesas de produção estão divididas em três categorias. Em cada uma delas, faz-se uma estimativa do custo de produção de um único exemplar de cada produto. Faz-se, também, uma estimativa da quantidade de cada produto a ser fabricado por trimestre. Essas estimativas são dadas nas tabelas que se seguem. A empresa gostaria de apresentar aos seus accionistas uma única tabela mostrando o custo total por trimestre de cada uma das três categorias: matéria-prima, pessoal e despesas gerais.

Custo de produção por unidade (em euros)			
Gastos	Produto A	Produto B	Produto B
Matéria-prima	0.10	0.30	0.15
Pessoal	0.30	0.40	0.25
Despesas gerais	0.10	0.20	0.15

Números de unidades produzidas por trimestre				
Produto	Primavera	Verão	Outono	Inverno
A	4000	4000	4500	4500
B	2200	2000	2600	2400
C	6000	5800	6200	6000

130. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine a matriz D que verifica a equação matricial $A^{-1}DB^{-1} = A^T$.

    (b) Calcule a inversa de C.

131. Mostre que:

    (a) A inversa de A^{-1} é A, isto é $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

    (b) A inversa de uma matriz 2×2 pode ser escrita na forma $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$, sempre que $\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. A $\det(A)$ chama-se determinante da matriz A.

    (c) Uma matriz diagonal é invertível sempre que nenhum elemento da sua diagonal seja nulo.

132. Se possível, inverta as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

133. Considere os seguintes sistemas: $\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    (a) Resolva-os, usando o método de eliminação de Gauss.

    (b) Que pode concluir acerca da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?

134. Na codificação de uma mensagem, um espaço em branco é representado por 0, um A por 1, um B por 2, um C por 3 e assim por diante. A mensagem foi transformada usando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e enviada como $15, 4, -4, 3, -32, 33, -1, 12, -34, 34, 5, 10, 7, 11, -15, 21, 6, 3, 6, -6, 13, 3, -15, 18, -19,$ $19, 3, 15, -18, 19, -1, 1$. Qual é a mensagem?

135. Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução do sistema homogéneo correspondente:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$.

136. Determine um sistema com duas equações e três incógnitas cuja solução geral seja $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

137. Indique para que valores de b_1 e b_2 o sistema $Ax = b$ é possível, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

138. Suponha que num sistema biológico existem n espécies de animais e m tipos de alimento. Nesse sistema, representaremos por x_j o número de animais da espécie j, $j = 1, \ldots, n$, por b_i a quantidade diária de comida disponível do tipo i, $i = 1, \ldots, m$, e por a_{ij} a quantidade de alimento do tipo i consumida diariamente (em média) por um animal da espécie j. O sistema linear

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

representa a situação de equilíbrio, isto é, a situação em que existe uma quantidade diária de comida disponível exactamente igual ao consumo médio de cada espécie.

(a) Considerando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$x = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 350 & 400 \end{bmatrix}^T$ e $b = \begin{bmatrix} 3500 & 2700 & 900 \end{bmatrix}^T$, haverá comida suficiente para satisfazer o consumo médio diário das espécies de animais?

(b) Considere A e b de (a).

i. Qual o número máximo de animais de cada espécie que pode ser individualmente acrescentado ao sistema de modo a que as reservas de comida ainda sejam suficientes para o consumo?

ii. Se a espécie 1 se extinguisse, qual o acréscimo individual das restantes espécies suportado pelo sistema?

iii. Se a espécie 2 se extinguisse, qual o acréscimo individual das restantes espécies suportado pelo sistema?

139. No estudo de sistemas de equações lineares verificou-se que um sistma $Ax = b$, com A uma matrix $m \times n$, pode não ter solução. Um caso frequente ocorre quando o sistema tem mais equações que incóginitas ($m > n$). Nesse caso, pode ser útil determinar o vector $\overline{x}$ que minimiza $\|Ax - b\|^2$. O vector $\overline{x}$ nessas condições chama-se a solução (no sentido) dos mínimos quadrados de $Ax = b$. Pode demonstrar-se que, quando $m > n$, essa solução pode ser obtida pela resolução do sistema (possível e determinado) $A^T A\overline{x} = A^T b$.

Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema (com m equações e uma incógnita) $x = \beta_1,\ x = \beta_2, \ldots,\ x = \beta_m$.

140. O sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

é impossível. Verifique que a solução no sentido dos mínimos quadrados é única.

141. Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente graficamente): (a) $(0,0),\ (1,0),\ (3,12)$; (b) $(-1,2),\ (1,-3),\ (2,-5),\ (0,0)$.

142. Calcule a parábola dos mínimos quadrados para a função f dada pela seguinte tabela

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_i)$	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	2.1	1.7

143. A lei de Hooke estabelece que a força F aplicada a uma mola é directamente proporcional ao deslocamento provocado de acordo com a seguinte relação $F = k(e - e_0)$, onde k é a constante da mola, e o comprimento da mola quando sujeita à força F e e_0 o comprimento inicial da mola. No sentido de determinar a constante da mola usaram-se diferentes forças (conhecidas) tendo sido observados os comprimentos resultantes, dados na seguinte tabela

Força F (em gramas)	3	5	8	10
Comprimento e (em milímetros)	13.3	16.3	19.4	20.9

Sabendo que o comprimento inicial da mola é $e_0 = 10$ mm e considerando as medições (não correlacionadas) com precisão inversamente proporcional ao comprimento observado, determine a melhor estimativa para a constante da mola, usando o algoritmo dos mínimos quadrados.

144. A pressão sistólica p (em milímetros de mercúrio) de uma criança saudável com peso w (em quilogramas) é dada, de forma aproximada, pela equação $p = a + b \ln w$. Use os seguintes dados experimentais

w	20	28	37	51	59
p	91	99	104	108	111

para estimar a pressão sistólica de uma criança de 45 quilogramas.