Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

$2^{\underline{o}}$ semestre 2007/2008
Duração: 2h30m

Exame de Matemática Computacional

14 de Julho de 2008

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja α a solução de $x^6 = x^4 + x^3 + 1$ mais próxima de 1.
   (a) Separe α num intervalo de amplitude não superior a 1, justificando o procedimento.
   (b) Aproxime α pelo método de Newton-Raphson, efectuando duas iterações.

2. Efectuando duas iterações do método iterativo de Newton para sistemas não lineares, obtenha uma aproximação para a solução do sistema

$$F(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 & = & 0 \\ x + y - 2xy & = & 0 \end{cases}$$

   a partir de $[x_0, y_0]^T = [2, 1]^T$.

3. Considere a função $f(x) = e^x$, para $x \in [0, 1]$.
   (a) Qual o menor número de pontos, igualmente distanciados, que deve tomar em $[0, 1]$ se pretender aproximar $f(x)$ por um polinómio interpolador, nesses pontos, por forma que o erro máximo da interpolação seja inferior a 10^{-2}?
   (b) Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 3 para a função dada no intervalo $[0\,, 1]$.

4. Seja $I = \int_a^b f(x)dx$.
   (a) Mostre que

$$I = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

   (b) Considerando $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ e $f(x) = x \sin x$, calcule aproximadamente o valor do integral I, usando a fórmula de Simpson, por forma a que a aproximação obtida tenha 3 casas decimais correctas.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4x & - & 2y & + & z & = & 9 \\ -2x & + & 10y & - & 0.5z & = & 4.5 \\ x & - & 0.5y & + & 2z & = & 3.5 \end{cases}.$$

   (a) Prove que o método iterativo de Gauss-Seidel, aplicado a este sistema, é convergente, qualquer que seja a aproximação inicial considerada.
   (b) Calcule duas iterações do referido método, partindo da aproximação inicial

$$[x_0, y_0, z_0]^T = [1.5, 0.5\,, 2.0]^T.$$

   Indique uma estimativa para o erro da aproximação obtida.

6. Considere o problema de condições iniciais

$$\begin{cases} y'(t) &= -\dfrac{y^3+y}{(3y^2+1)t}, & t \in]1,2], \\ y(1) &= 1. \end{cases}$$

Sabendo que solução exacta é dada implicitamente por

$$y^3 t + yt = 2,$$

aproxime $y(2)$ usando:

(a) o método da bissecção em duas iterações, indicando uma estimativa para o erro na segunda iteração;

(b) o método de Runge-Kutta de ordem 2, com $h = 0.5$.

FORMULÁRIO

Método de Newton $(f(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Newton para sistemas $(F(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \; i = 0, \ldots, n.$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i)h_{1i}(x) + f'(x_i)h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \quad \text{e} \quad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}((x - x_0)\cdots(x - x_n))^2.$$

Fórmula de Simpson

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \qquad n \text{ par}.$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b - a)f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$A = D - L - U$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Runge-Kutta de ordem 2

$k_1 = f(t_i, u_i)$; $k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1)$;

$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$.
