Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

15 de Julho de 2009 — Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere a equação $\sin x + 1 - ax = 0$, com $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Diga, justificando, para que valores de a a equação tem uma única raiz α no intervalo $I = [0, \pi/2]$.
   (b) Para os valores de a considerados na alínea anerior, mostre que o método do ponto fixo com a função iteradora $g(x) = \frac{1}{a}(1 + \sin x)$ converge para α, qualquer que seja a aproximação inicial escolhida em I.
   (c) Determine uma aproximação para α efectuando duas iterações do método do ponto fixo com a função iteradora g e $a = 2$.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{bmatrix}$, cuja solução exacta é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Determine o número de condição de A na norma $\|\cdot\|_\infty$.
   (b) Considere agora o sistema linear $A\overline{x} = \overline{b}$, onde $\overline{b} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon \\ 10^{-6} \end{bmatrix}$, com $\epsilon \in \mathbb{R}$. Obtenha um majorante para o erro relativo de $\overline{x}$ em função do erro relativo de $\overline{b}$ e comente o resultado.

3. Usando o método de Newton determine as coordenadas dos pontos de intersecção dos gráficos
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{9}x^2 + 4y^2 = 1,$$
a partir da condição inicial $[x_0\ y_0]^{\mathrm{T}} = [1\ 1]^{\mathrm{T}}$. Justifique o facto de poder usar a condição inicial dada.

4. A tabela que se segue diz respeito ao consumo de um produto durante o ano de 2009 numa cidade portuguesa:

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
Consumo	42	60	100	180	300	500

   (a) Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados.
   (b) Usando a alínea anterior, estime o consumo do produto no mês de Julho.

5. Considere
$$I = \int_0^\pi \sin x dx$$
e a definição: "uma fórmula de integração numérica diz-se de grau n se integrar exactamente os polinómios 1, x, ..., x^n e não for exacta na integração de x^{n+1}".
   (a) Determine o grau da fórmula dos trapézios de acordo com a definição dada.
   (b) Calcule uma aproximação para I usando a fórmula dos trapézios composta de modo a que o erro da aproximação não exceda $0{,}05\pi$.

6. Seja $y(t)$ uma solução da equação diferencial

$$ay''(t) + y'(t) - by(t) = ce^t(t+1), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad t \in]0, 1[,$$

e considere o método de Euler implícito.

(a) Determine o intervalo de estabilidade absoluta do método.

(b) Faça $a = 0$, $b = c = 1$ e determine uma aproximação para $y(1)$, usando o método de Euler implícito com $h < 1$, dada a condição $y(0) = 1$.

(c) Faça $a = 1/2$, $b = 2$, $c = -1/2$ e determine uma aproximação para $y(1/2)$ e $y'(1/2)$, usando o método de Euler implícito com $h \leq 0{,}5$, dadas as condições $y(0) = y'(0) = 1$.

Formulário

Método do ponto fixo ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$)

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Newton para sistemas ($F(x) = 0$)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$
