EXAME DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL (ENG. ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES)

5 DE JULHO DE 2010 DURAÇÃO: 2H30M

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Aplique o método de Newton (uma aproximação) na determinação da solução do sistema

$$x = \frac{2x^2 - 2y^2 + 1}{4} \qquad y = \frac{-x^4 - 4y^4 + 8y + 4}{12},$$

partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$. Indique uma estimativa para o erro absoluto da aproximação.

2. Considere a tabela resultante da medição da temperatura T (em graus Celsius) em diferentes tempos t (em horas):

t	0	2	3	7	10
T	10^o	12^o	15^o	20^o	25^o

(a) Determine um polinómio interpolador de grau 2 que aproxime T no intervalo $[0, 10]$.

(b) Determine uma aproximação para a variação instantânea de T em $t = 2$.

(c) Usando o método dos trapézios, calcule uma aproximação para

$$I = \int_0^3 T(t)dt.$$

Indique uma estimativa para o erro absoluto da aproximação.

(d) Suponha que conhece T nos $n + 1$ pontos t_i, $i = 0, ..., n$, e seja $l_i(t)$ o polinómio de Lagrange de grau n. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(t) = 1.$$

3. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ e o método de Gauss-Seidel.

(a) Deduza o método de Gauss-Seidel.

(b) Determine valores de a para os quais o método de Gauss-Seidel quando aplicado ao sistema gera uma sucessão de aproximações convergente para a solução exacta do sistema.

(c) Aplicando (duas vezes) o método de Gauss-Seidel, e fazendo $a = 1$, determine uma aproximação para a solução do sistema partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

(v.s.f.f.)

4. Seja $y(t)$ uma solução da equação diferencial

$$ay''(t) - y'(t) + 2y(t) = (1+a)e^t, \qquad t \in]0,1[.$$

   (a) Determine a região de estabilidade do método de Euler explícito.

   (b) Fazendo $a = 0$ e considerando $y(0) = 1$, determine uma aproximação para $y(1)$ usando o método referido na alínea anterior, com $h < 1$.

   (c) Considere $a = 2$ e $y(0) = 1$, $y(1) = e$. Determine uma aproximação para $y(1/3)$ e $y(2/3)$ usando o método das diferenças finitas.

Formulário

Método de Newton para sistemas $(F(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0,\ldots,n.$$

Fórmulas de derivação numérica

$$f'(x_k) = \frac{1}{2h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \qquad \xi \in]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in]a,b[.$$

Método de Euler explícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i), \qquad i = 0,1,2,\ldots.$$
