Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

5 de Julho de 2011 Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o método iterativo definido por $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, com $g(x) = \frac{e^x+1}{5}$, para aproximar a raiz da equação $e^x - 5x + 1 = 0$ próxima de $0,1$, α.
   (a) Determine um intervalo em que o método convirja para α.
   (b) Calcule a segunda iteração do método e indique uma estimativa para o erro cometido.
   (c) Quantas iterações do método são necessárias para garantir que α é aproximada com um erro inferior a 10^{-2}?

2. Mediu-se a temperatura T da ebulição da água em função da pressão P, tendo-se obtidos os valores da tabela:

P	20	40	60	80	90
T	250	260	290	310	320

   (a) Determine o polinómio de grau 2, $S(P) = s_0 + s_1P + s_2P^2$, $s_2 \neq 0$, interpolador de T em $[20, 90]$.
   (b) Usando a alínea anterior, determine uma aproximação para $T(70)$.
   (c) Obtenha o polinómio de Hermite de grau mínimo, interpolador de T no intervalo $[20, 60]$, sabendo que $T'(20) = 0,5$ e $T'(60) = 1,25$.
   (d) Determine uma aproximação para o erro da aproximação obtida na alínea anterior sabendo que

$$\max_{x\in[20,90]} |T'''(x)| < a, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Determine o sistema linear que lhe permite determinar os coeficientes da recta de regressão linear, supondo conhecidos os pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$.
   (b) Os seguintes dados mostram a relação entre número de horas que uma dada substância esteve no corpo de uma pessoa e a sua concentração no corpo (partes por milhão)

N (número de horas)	2	4	6	8
C (concentração)	2,1	1,6	1,4	1,0

   Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados e estime a concentração da substância após 5 horas.

4. Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/8 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

   (a) Escreva a fórmula iterativa $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g_J$, do método de Jacobi, para o sistema $Ax = b$.
   (b) Utilize o método da potência em duas iterações para aproximar o raio espectral de B_J.
   (c) Calcule $||B_J||_\infty$ e diga o que concluir sobre a convergência do método de Jacobi aplicado a $Ax = b$.

5. Sabe-se que $\sqrt{3} = 2\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos x \, dx$.
   (a) Utilizando a regra de Simpson indique o menor número de pontos que deve considerar por forma a determinar um valor aproximado do integral anterior com um erro que não exceda 10^{-4}.
   (b) Calcule um valor aproximado de $\sqrt{3}$ aplicando a regra de Simpson com 5 pontos.

6. Considere a equação diferencial com condições iniciais:

$$y(t)y'(t) - y''(t) = 0 \ , \quad t \in [0,1],$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(a) Converta este problema num sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

(b) Aproxime $y(1/2)$ e $y'(1/2)$ com passo $h = 1/4$, usando o método de Euler explícito.

(c) Estude a consistência e o intervalo de estabilidade do método de Euler explícito.

Formulário

Método do ponto fixo $(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x))$

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Fórmula de erro para o ponto fixo

$$|\alpha - x^{(k)}| \leq K^k \max\{x^{(0)} - a, b - x^{(0)}\}.$$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ i = 0, \ldots, n.$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) h_{1i}(x) + f'(x_i) h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \qquad \text{e} \qquad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Fórmula de erro para a interpoladora de Hermite

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}((x - x_0) \cdots (x - x_n))^2.$$

Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$

$$A^T A x = A^T b$$

Fórmula de Simpson

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \qquad n \text{ par.}$$

Fórmula do erro para a regra de Simpson

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b - a) f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Euler explícito

$$u_{i+1} = u_i + h f(t_i, u_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$
