Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

10 de Julho de 2012 Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o método iterativo

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & -\omega \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 2\omega \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Mostre que tomando $\omega = 1$, obtém o método de Jacobi.

(b) Para que valores de ω consegue garantir a convergência do método iterativo? O que pode concluir acerca da convergência do método de Jacobi?

(c) Fazendo $\omega = 0{,}3$, determine quantas iterações são necessárias para reduzir o erro inicial 10 vezes.

2. Use os círculos de Gershgorin para provar que os valores próprios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ são todos reais.

3. O número de ouro ϕ, pode ser obtido como solução positiva da equação

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

(a) Mostre que a equação anterior tem uma única raiz positiva em $]1{,}1,\ 2[$ e conclua que $\phi \in\ ]1{,}1,\ 2[$.

(b) Pretende-se determinar um valor aproximado para ϕ usando o método do ponto fixo

$$x^{(k+1)} = 1 + \frac{1}{x^{(k)}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Mostre que o método anterior converge para ϕ, qualquer que seja $x^{(0)} \in\ ]1{,}1,\ 2[$.

(c) Determine quantas iterações são necessárias efectuar para obter uma aproximação para ϕ com quatro casas decimais correctas.

4. (a) Sejam $p \in \{0, 1, \ldots, n\}, n \geq 1$ e $I = [a, b]$ um intervalo. Considere $n+1$ pontos distintos $x_i \in I$, $i = 0, \ldots, n$. Mostre que

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^p l_i(x) = x^p,$$

onde, para cada $i = 0, \ldots, n$, l_i é o polinómio de Lagrange associado ao ponto x_i.

(b) Considere um polinómio de grau 2, P, do qual se conhece a informação reunida na seguinte tabela:

x_i	-2	-1	-0,5	0
$P(x_i)$	1,8	2	α	3

i. Obtenha a expressão de P e calcule o valor de α.

ii. Suponha que P interpola uma função $f : [-2, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ nos pontos dados na tabela. Sabendo que $f'(-2) = 1$ e $f'(0) = -1$, use um polinómio de Hermite para determinar uma aproximação para $f'(-0{,}5)$.

5. Considere o integral
$$I = \int_0^1 e^x \, dx.$$
   (a) Determine o número mínimo de pontos para aproximar o valor de I com um erro absoluto inferior a 5×10^{-4}, usando a fórmula de Simpson.
   (b) Use a fórmula de Simpson com cinco pontos para determinar um valor aproximado para I.

6. (a) Mostre que o método de Euler explícito tem ordem de consistência igual a 1.
   (b) Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias
$$\begin{array}{rcll} y'(t) & = & yt - z, & y(0) = 1, \\ z'(t) & = & zt + y, & z(0) = 0{,}5, \end{array} \qquad t \in]0,\ 1{,}2].$$
   Resolva o sistema usando o método de Euler explícito com $h = 0{,}6$.

Formulário

Método do ponto fixo $(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x))$

$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$

$|\alpha - x^{(k)}| \leq K^k \max\{x^{(0)} - a, b - x^{(0)}\}.$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \ i = 0, \ldots, n.$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) h_{1i}(x) + f'(x_i) h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \qquad \text{e} \qquad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$A = D - L - U$

$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$

Fórmula de Simpson

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \qquad n \text{ par}.$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b - a) f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Euler explícito

$u_{i+1} = u_i + h f(t_i, u_i), \qquad i = 0, 1, 2, ...$
