Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

5 de julho de 2013 — Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende-se ajustar a função

$$g(x) = a + bx^2, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos da seguinte tabela:

x_i	0,0	1,5	3,0	4,5	6,0
f_i	1,00	1,57	2,00	4,30	7,00

(a) Mostre que a e b verificam

$$Mx = d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 67{,}5 \\ 67{,}5 & 1792{,}125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}87 \\ 360{,}6075 \end{bmatrix}$$

(b) Suponhamos que se pretende resolver o sistema linear anterior com o segundo membro dado por

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} 15{,}87 \\ 360{,}61 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a solução $\bar{x}$ de $M\bar{x} = \bar{d}$ verifica

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq K(M) \frac{\|d - \bar{d}\|}{\|d\|}$$

e deduza qual o erro relativo que se comete quando se considera a norma $\|\cdot\|_\infty$ e a aproximação dada para o segundo membro.

2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_1 + \alpha x_2 = 0 \end{cases},$$

onde α é um parâmetro real negativo.

(a) Determine todos os valores de α que garantem a convergência do método de Jacobi quando aplicado a este sistema.

(b) Considerando $\alpha = -1$, efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

3. Considere a seguinte equação

$$x^3 - 3^{-x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Localize graficamente a raiz real α, desta equação, num intervalo $I = [a, b]$, de amplitude não superior a 0,5, e faça a sua confirmação analítica.

(b) Mostre que o método iterativo $x_{n+1} = 3^{-\frac{x_n}{3}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, gera uma sucessão que converge para a solução da equação dada. Determine, depois, uma aproximação para α, executando 3 iterações, partindo de $x_0 = 0{,}5$.

(c) Determine a ordem de convergência daquele processo para a equação em questão.

4. (a) Mostre que

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) f(x_i), \quad \text{com } l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

é o único polinómio, de grau menor ou igual a dois, interpolador de f nos pontos dados.

(b) A lei de *Ohm* diz que a tensão V nas extremidades de uma resistência percorrida por uma corrente eléctrica com intensidade I é directamente proporcional a essa intensidade de corrente. Isso só é verdade para resistências ideais; as resistências reais apresentam comportamentos menos lineares. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados para uma resistência concreta:

I	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0
V	-193	-41	0	41	193

Atendendo ao comportamento simétrico relativamente à origem, determine o polinómio segmentado quadrático interpolador da função dada na tabela.

5. Determine o valor aproximado de

$$I = \int_0^1 e^x \cos x dx,$$

com duas casas decimais correctas, usando a regra dos trapézios .

6. Seja $y(t)$ uma solução da equação diferencial

$$ay''(t) + y'(t) - y(t) = 2(a+t) - t^2, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad t \in]0,1[.$$

(a) Determine a região de estabilidade do método de Euler explícito.

(b) Fazendo $a = 0$ e considerando $y(0) = 0$, determine uma aproximação para $y(1)$ usando o método referido na alínea anterior, com $h < 1$.

(c) Considere $a = 1$ e $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Determine uma aproximação para $y(1/3)$ e $y(2/3)$ usando o método das diferenças finitas.

Formulário

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$A = D - L - U$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Newton $(f(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i)h_{1i}(x) + f'(x_i)h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \qquad \text{e} \qquad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Fórmula de erro para o interpolador de Hermite

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}((x - x_0)\cdots(x - x_n))^2.$$

Método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$
