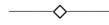


### Exame de Matemática Computacional

23 de Junho de 2008



**Nota:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere a função  $f(x) = e^{-x} - x^2 + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Mostre que a equação  $f(x) = 0$  admite, pelo menos, uma raiz real e, servindo-se do método da bissecção, obtenha um intervalo de amplitude menor ou igual a 0.1 que contenha essa raiz.
  - (b) Aproxime a raiz localizada na alínea anterior pelo método de Newton, em 2 iterações, mostrando que pode aplicar esse método iterativo.
2.
  - (a) Prove a existência e unicidade do polinómio  $P_n(x)$  de grau  $\leq n$  que interpola a função  $f(x)$  nos pontos (distintos) dados  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .
  - (b) Determine o menor número de pontos igualmente distanciados que deve tomar em  $[0, \frac{\pi}{2}]$  para aproximar  $f(x) = \sin x$  por um polinómio interpolador, nesses pontos, por forma que o erro máximo da interpolação seja inferior a 0.5.
3. Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 38 \\ x_1 + 20x_2 - 9x_3 = -23 \\ 2x_1 - 7x_2 - 20x_3 = -57 \end{cases} .$$

- (a) Escreva a relação de recorrência do método de Jacobi na forma matricial e prove que, "qualquer que seja a aproximação inicial considerada o método iterativo aplicado a este sistema converge sempre".
  - (b) Aproxime a solução do sistema efectuando duas iterações do método de Jacobi, indicando o factor de redução do erro, relativamente ao erro inicial.
4. Efectue duas iterações do método da potência para aproximar o valor próprio de módulo máximo da seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

5. Considere o integral definido

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sin x) dx.$$

- (a) Qual o menor número de pontos igualmente distanciados que deve considerar em  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$  por forma a que o erro, no cálculo aproximado de  $I$  pela regra dos trapézios, não exceda  $10^{-4}$ .
- (b) Usando a regra de Simpson calcule a área limitada pelas curvas

$$y = \sin x, \quad \text{e} \quad y = x^2,$$

considerando  $x \leq 1$ .

6. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}, & t \in ]1, 5], \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

(a) Mostre que o problema tem solução única.

(b) Use o método de Heun, com passo  $h = 0.1$ , para obter uma aproximação para  $y(1.2)$ .

## Formulário

**Método de Newton** ( $f(x) = 0$ )

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Interpolador de Lagrange**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

**Fórmula do trapézio**

$$I_T(f) = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\xi), \quad \xi \in ]a, b[.$$

**Fórmula de Simpson**

$$I_S(f) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad n \text{ par.}$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in ]a, b[.$$

**Método de Jacobi** ( $Ax = b$ )

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Método de Heun**

$$k_1 = f(t_i, u_i); \quad k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1);$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$