Departamento de Matemática | 2º semestre 2007/2008
Universidade de Coimbra | Duração: 2h30m

Exame de Matemática Computacional

23 de Junho de 2008

—◇—

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere a função $f(x) = e^{-x} - x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ admite, pelo menos, uma raíz real e, servindo-se do método da bissecção, obtenha um intervalo de amplitude menor ou igual a 0.1 que contenha essa raiz.
   (b) Aproxime a raiz localizada na alínea anterior pelo método de Newton, em 2 iterações, mostrando que pode aplicar esse método iterativo.

2. (a) Prove a existência e unicidade do polinómio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola a função $f(x)$ nos pontos (distintos) dados $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
   (b) Determine o menor número de pontos igualmente distanciados que deve tomar em $[0, \frac{\pi}{2}]$ para aproximar $f(x) = \sin x$ por um polinómio interpolador, nesses pontos, por forma que o erro máximo da interpolação seja inferior a 0.5.

3. Considere o sistema de equações lineares:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 38 \\ x_1 & + & 20x_2 & - & 9x_3 & = & -23 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & - & 20x_3 & = & -57 \end{array}\right. .$$
   (a) Escreva a relação de recorrência do método de Jacobi na forma matricial e prove que, "qualquer que seja a aproximação inicial considerada o método iterativo aplicado a este sistema converge sempre".
   (b) Aproxime a solução do sistema efectuando duas iterações do método de Jacobi, indicando o factor de redução do erro, relativamente ao erro incial.

4. Efectue duas iterações do método da potência para aproximar o valor próprio de módulo máximo da seguinte matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Considere o integral definido
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sin x)\, dx.$$
   (a) Qual o menor número de pontos igualmente distanciados que deve considerar em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ por forma a que o erro, no cálculo aproximado de I pela regra dos trapézios, não exceda 10^{-4}.
   (b) Usando a regra de Simpson calcule a área limitada pelas curvas
$$y = \sin x, \qquad \text{e} \qquad y = x^2,$$
   considerando $x \leq 1$.

6. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{y(t)}{1+t^2}, & t \in]1,5], \\ y(1) &= 4. \end{cases}$$

(a) Mostre que o problema tem solução única.

(b) Use o método de Heun, com passo $h = 0.1$, para obter uma aproximação para $y(1.2)$.

Formulário

Método de Newton $(f(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \; i = 0, \ldots, n.$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

Fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Fórmula de Simpson

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \qquad n \text{ par}.$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Heun

$$k_1 = f(t_i, u_i); \;\; k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1);$$

$$u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2).$$
