Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

24 de Junho de 2009 Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. A equação $e^x - x - 2 = 0$ tem uma raiz em $[1, 2]$. Para determinar essa raiz pretende-se utilizar o método do ponto fixo com uma das seguintes funções iteradoras:

$$g_1(x) = e^x - 2, \qquad g_2(x) = \ln(x+2).$$

   (a) Verifique que os pontos fixos das duas funções iteradoras coincidem com a raiz da equação dada.

   (b) Qual das duas funções iteradoras consideradas é aquela que, em princípio, garante a convergênca mais rápida do método do ponto fixo? Justifique.

   (c) Determine uma aproximação para a raiz efectuando duas iterações do método do ponto fixo com a função iteradora g_2, provando a convergência do método.

2. (a) Prove a unicidade do polinómio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola a função $f(x)$ nos pontos distintos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

   (b) Registou-se a velocidade de um pára-quedista, segundos após ter saltado, tendo-se obtido os resultados da tabela:

Tempo (s)	1	3	5	7	13
Velocidade (m/s)	8	23	30	40	48

   i. Determine uma estimativa para a velocidade em $t = 10$ s, usando um polinómio interpolador de grau 3.

   ii. Defina um polinómio segmentado linear interpolador da velocidade, v, e determine uma aproximação para $v(10)$.

3. Considere o sistema linear $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -14 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$.

   (a) Deduza o método de Gauss-Seidel e indique uma condição necessária e suficiente para que o método seja convergente.

   (b) Justificando, reescreva o sistema por forma a garantir que o método de Gauss-Seidel gere uma sucessão convergente para a solução do sistema, qualquer que seja a aproximação inicial escolhida.

   (c) Faça $x^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$ e aplique duas vezes o método de Gauss-Seidel, indicando uma estimativa para o erro relativo cometido.

4. Considere

$$I = \ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

   e a definição: "uma fórmula de integração numérica diz-se de grau n se integrar exactamente os polinómios 1, x, ..., x^n e não for exacta na integração de x^{n+1}".

   (a) Determine o grau da fórmula dos trapézios usando a definição.

   (b) Calcule uma aproximação para I usando a fórmula dos trapézios composta de modo a que o erro da aproximação não exceda 0,005.

   (c) Indique dois processos distintos de obter uma aproximação para I com um erro inferior ao encontrado na alínea anterior.

(v.s.f.f.)

5. Seja $y(t)$ uma solução da equação diferencial

$$ay''(t) + y'(t) + y(t) = e^t(a+1), \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad t \in]0,1[,$$

e considere o método de Euler implícito.

(a) Determine o intervalo de estabilidade absoluta do método e diga qual a importância do conhecimento desse intervalo na aplicação do método à resolução de um problema de condição inicial.

(b) Faça $a = 0$ e determine uma aproximação para $y(1)$, usando o método de Euler implícito com $h \leq 0{,}5$, dada a condição $y(0) = 1$.

(c) Faça $a = 1$ e determine uma aproximação para $y(1/3)$ e y(2/3), usando o método das diferenças finitas, dadas as condições $y(0) = 1$ e $y(1) = e$.

Formulário

Método do ponto fixo $(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x))$

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \; i = 0, \ldots, n.$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

Fórmulas de derivação numérica

$$f'(x_k) = \frac{1}{2h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \qquad \xi \in]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U x^{(k)} + (D - L)^{-1} b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a) f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + h f(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$
