Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

16 de Junho de 2010 — Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 - x + 3$.
   (a) Separe todas as raízes reais da equação $f(x) = 0$.
   (b) Aproxime a menor raiz real da equação usando o método de Newton (duas aproximações).

2. Em problemas de Estatística é frequente o uso da função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

   (a) Determine o polinómio interpolador de grau 2 da função f no intervalo $[0, 2]$. Recorra a valores da tabela:

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0,4	0,35	0,24	0,13	0,1

   (b) Usando a alínea anterior, como pode aproximar f em $[-2, 0]$? Justifique.
   (c) Indique o erro que se comete ao aproximar $f(0{,}25)$ pelo polinómio encontrado na alínea (a).

3. (a) Suponha conhecidos os $n+1$ pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Determine a recta da forma $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, que melhor se ajusta aos dados no sentido dos mínimos quadrados.
   (b) Usando a alínea anterior determine a recta dos mínimos quadrados que passa na origem que se ajusta aos dados da tabela:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	6	8	9

4. Considere

$$I = \int_4^6 x e^{-x} dx$$

   e a definição: "uma fórmula de integração numérica diz-se de grau n se integrar exactamente os polinómios 1, x, ..., x^n e não for exacta na integração de x^{n+1}".
   (a) Determine o grau da fórmula dos trapézios simples usando a definição.
   (b) Calcule uma aproximação para I usando a fórmula dos trapézios composta de modo a que o erro da aproximação não exceda $0{,}5 \times 10^{-2}$.

5. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2+p \\ -1 \end{bmatrix}$ e o método de Jacobi.
   (a) Deduza o método de Jacobi.
   (b) Determine valores de p para os quais o método de Jacobi quando aplicado ao sistema gera uma sucessão de aproximações convergente para a solução exacta do sistema.
   (c) Determine uma aproximação para a solução do sistema com $p = 3$ usando o método de Jacobi (duas vezes), partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

6. Seja $y(t)$ uma solução da equação diferencial

$$y'(t) = t^2 + y^2, \qquad t \in]0, 1/2[,$$

com a condição inicial $y(0) = 0{,}1$ e considere o método de Euler implícito.

(a) Sabendo que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|y(t)| < C$, para todo o $t \in [0, 1/2]$, prove que existe uma só solução para o problema de condição inicial dado.

(b) Determine o intervalo de estabilidade absoluta do método.

(c) Determine uma aproximação para $y(1/2)$ usando o método dado.

Formulário

Método de Newton $(f(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0, \ldots, n.$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a)f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$
