Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

17 de Junho de 2011 Duração: 2h30m

**Nota**: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. O valor da resistência num circuito eléctrico varia com $i$ de acordo com $R(i) = 50 + i^{2/3}$.

   (a) Atendendo à lei de Ohm, $V = iR$, deduza um método iterativo da forma $i_{n+1} = g(i_n)$ que permita determinar a intensidade de corrente quando $V = 7$ volts. Prove a sua convergência.

   (b) Aproxime o valor da intensidade de corrente quando $V = 7$ volts, efectuando duas iterações do método iterativo obtido na alínea anterior.

   (c) Determine o número de iterações que deverá efectuar com o método deduzido na alínea (a) por forma a obter uma aproximação para a solução pretendida com um erro que não exceda $0{,}5 \times 10^{-3}$.

2. Relativamente a uma função $f$ são conhecidos os valores da tabela:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 | 2 | 4 | 5 |

   (a) Determine um polinómio interpolador de grau 2 que aproxime $f$ no intervalo $[0, 4]$.

   (b) Prove que por $n + 1$ pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, ..., n$, passa um e um só polinómio de grau menor ou igual a $n$.

3. Mostre que a recta de regressão linear que se ajusta aos dados

$$(a - h, y_1), \quad (a, y_2), \quad (a + h, y_3)$$

   tem declive independente de $y_2$. Determine uma condição para que a recta tenha uma inclinação de 45º relativamente ao eixo das abcissas.

4. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 + a \end{bmatrix}$ e o método de Jacobi.

   (a) Determine valores de $a$ para os quais o método de Jacobi quando aplicado ao sistema gera uma sucessão de aproximações convergente para a solução exacta do sistema.

   (b) Aplicando (duas vezes) o método de Jacobi, e fazendo $a = 5$, determine uma aproximação para a solução do sistema partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$. Indique uma estimativa para o erro absoluto cometido.

5. Pretende-se aproximar a função erf, definida por

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du,$$

   no ponto $x = 0{,}5$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar para, aplicando a regra dos trapézios, obter um erro inferior a $0{,}5 \times 10^{-2}$?

   (b) Obtenha um valor aproximado de $\mathrm{erf}(0{,}5)$ utilizando a regra dos trapézios com 5 pontos.

(v.s.f.f.)

6. Seja $y(t)$ uma solução da equação diferencial

$$ay''(t) + y'(t) - y(t) = 2(a+t) - t^2, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad t \in ]0,1[.$$

(a) Determine a região de estabilidade do método de Euler explícito.

(b) Fazendo $a = 0$ e considerando $y(0) = 0$, determine uma aproximação para $y(1)$ usando o método referido na alínea anterior, com $h < 1$.

(c) Considere $a = 1$ e $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Determine uma aproximação para $y(1/3)$ e $y(2/3)$ usando o método das diferenças finitas.

---

**Formulário**

---

**Método do ponto fixo** $(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x))$

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$|\alpha - x^{(k)}| \leq K^k \max\{x^{(0)} - a, b - x^{(0)}\}.$$

**Interpolador de Lagrange**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0, \ldots, n.$$

**Solução dos mínimos quadrados para** $Ax = b$

$$A^T A x = A^T b$$

**Fórmulas de derivação numérica**

$$f'(x_k) = \frac{1}{2h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \qquad \xi \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in ]x_{k-1}, x_{k+1}[.$$

**Método de Jacobi** $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

**Fórmula do trapézio**

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi), \qquad \xi \in ]a, b[.$$

**Método de Euler explícito**

$$u_{i+1} = u_i + h f(t_i, u_i), \qquad i = 0, 1, 2, ....$$

---