Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

22 de Junho de 2012 Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Escreva o método de Jabobi na forma matricial para o sistema dado.

   (b) Pode garantir a convergência do método? Explique.

   (c) Aplicando (duas vezes) o método de Jacobi, determine uma aproximação para a solução do sistema partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$. Indique uma estimativa para o erro absoluto cometido.

2. Considere os pontos $(-5, 10)$, $(-3, 4)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. Determine as constantes a e b por forma a que a função
$$g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2$$
se ajuste aos dados no sentido dos mínimos quadrados.

3. (a) Uma empresa de calculadoras procura uma fórmula de cálculo da raiz quadrada de um número real $a > 0$ envolvendo apenas somas, multiplicações e divisões.

      i. Recordando que $\sqrt{a}$ satisfaz $x^2 - a = 0$, escreva o método de Newton para a equação anterior.

      ii. Considere o caso $a = 2$. Mostre que o método de Newton converge escolhendo $x^{(0)} = 1{,}5$.

      iii. Determine a segunda iteração do método de Newton usando a aproximação inicial anterior.

   (b) Mostre que o método de Newton tem ordem de convergência 2.

4. Determine um polinómio que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(1, 0)$ de modo a que o declive das rectas tangentes ao polinómio nesses pontos seja 1.

5. Pretende-se determinar o valor de $I(f) = \int_1^2 f(x)dx$ por uma fórmula de integração numérica.

   (a) Deduza a fórmula do ponto médio
$$I(f) = f(1{,}5) + \frac{1}{24} f''(c), \qquad c \in]1,\ 2[.$$

   (b) Aproxime o valor do integral $I(x^2 \ln x)$ usando a fórmula do ponto médio, indicando um majorante para o erro cometido.

6. Considere o seguinte problema de condição inicial
$$y'(t) = \frac{2}{t} y + t^2 e^t, \quad t \in]1, 2]; \quad y(1) = 0.$$

   (a) Obtenha o valor aproximado de $y(2)$, usando o método de Euler implícito, com $h = 0{,}5$.

   (b) Deduza a ordem do erro de truncatura local do método de Euler implícito.

Formulário

Método de Newton $(f(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$

$$A^T A x = A^T b$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) h_{1i}(x) + f'(x_i) h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \qquad \text{e} \qquad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, ...$$