Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

20 de junho de 2013 — Duração: 2h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende-se ajustar a função

$$g(x) = a + bx^2, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos da seguinte tabela:

x_i	0,0	1,5	3,0	4,5	6,0
f_i	1,00	1,57	2,00	4,30	7,00

(a) Mostre que a e b verificam

$$\begin{bmatrix} 5 & 67{,}5 \\ 67{,}5 & 1792{,}125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}87 \\ 360{,}6075 \end{bmatrix}$$

(b) A resolução do sistema anterior pode ser feita recorrendo ao método de Gauss-Seidel. Mostre que este método é convergente quando aplicado ao problema anterior.

(c) Mostre que, para um método iterativo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, $k = 0, 1, ...$, usado na aproximação de x^* se tem

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|x^* - x^{(0)}\|$$

e determine quantas iterações são necessárias do método de Gauss-Seidel por forma a reduzir o erro inicial da aproximação por um fator de 10^{-3}.

2. Use os círculos de Gershgorin para provar que os valores próprios de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

são todos reais e determine uma aproximação para o raio espectral da matriz usando o método da potência em segunda aproximação.

3. Um avião em voo vertical descreve uma trajetória que, para $t \in [0, 1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão $h(t) = (t-1)e^t - t + 3$.

(a) Calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, aplicando o método de Newton duas vezes.

(b) Aproxime a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

4. Considere a função $f(x) = \sin x$, definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Determine o menor número de pontos que deve considerar no intervalo dado para que o erro da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador de Hermite nesses pontos seja inferior a 0,1, para todo o $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Sabendo que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ utilizando o polinómio obtido na alínea anterior.

v.s.f.f.

5. Pretende-se calcular o valor do integral $I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$ usando a fórmula do trapézio.

   (a) Deduza a fórmula do trapézio simples

   $$I(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12}f''(c), \qquad c \in]0,\ 1[.$$

   (b) Aproxime o valor do integral $I(e^x)$ usando a fórmula do trapézio simples, indicando um majorante para o erro cometido.

6. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

   $$\begin{array}{rcll} y'(t) & = & yt - z, & y(0) = 1, \\ z'(t) & = & zt + y, & z(0) = 0{,}5, \end{array} \qquad t \in\ ]0,\ 0{,}6].$$

   (a) Resolva o sistema usando o método de Euler implícito com $h = 0{,}6$.

   (b) Mostre que o método de Euler implícito tem ordem de consistência igual a 1.

Formulário

Método de Gauss-Seidel ($Ax = b$)

$A = D - L - U$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Newton ($f(x) = 0$)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}[f(x_i)h_{1i}(x) + f'(x_i)h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \qquad \text{e} \qquad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Fórmula de erro para o interpolador de Hermite

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}((x - x_0)\cdots(x - x_n))^2.$$

Método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$
