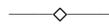


### Frequência de Matemática Computacional

10 de Abril de 2008



**Nota:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende determinar-se a única raiz  $\alpha$  de  $f(x) = 0$ , em  $[a, b]$ , usando o método de Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- (a) Diga quais as condições que permitem garantir a convergência do referido método.  
(b) Use o método de Newton duas vezes para aproximar a solução da equação  $(x - 2)^2 - \ln x = 0$ , com  $x \in [1, 2]$ .

2. Considere a função vectorial  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 - 1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule a matriz Jacobiana de  $F$  e as raízes de  $F(x_1, x_2) = 0$ .  
(b) Efectue, se possível, uma iteração do método de Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

partindo dos pontos  $x^{(0)} = (0, 0)$  e  $x^{(0)} = (1, 1)$ .

3. Seja  $f$  uma função real de variável real, conhecida nos pontos  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

- (a) Mostre que

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 l_i(x) f(x_i), \quad \text{com} \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

é o único polinómio, de grau menor ou igual a dois, interpolador de  $f$  nos pontos dados.

- (b) A lei de Ohm diz que a tensão  $V$  nas extremidades de uma resistência percorrida por uma corrente eléctrica com intensidade  $I$  é directamente proporcional a essa intensidade de corrente. Isso só é verdade para resistências ideais; as resistências reais apresentam comportamentos menos lineares. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados para uma resistência concreta:

$I$	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0
$V$	-193	-41	0	41	193

Atendendo ao comportamento simétrico relativamente à origem, determine o polinómio segmentado quadrático interpolador da função dada na tabela.

4. Determine o valor aproximado de  $\int_4^6 x e^{-x} dx$ , com duas casas decimais correctas, usando a fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{H}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{M-1}) + f(x_M)],$$
$$E_T(f) = -\frac{H^2}{12}(b-a)f''(\xi), \quad \xi \in ]a, b[, \quad \text{onde} \quad H = \frac{b-a}{M}.$$