Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

2º semestre 2007/2008
Duração: 1h30m

Frequência de Matemática Computacional

10 de Abril de 2008

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende determinar-se a única raiz α de $f(x)=0$, em $[a,b]$, usando o método de Newton
$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)},\quad k=0,1,\ldots.$$
   (a) Diga quais as condições que permitem garantir a convergência do referido método.
   (b) Use o método de Newton duas vezes para aproximar a solução da equação $(x-2)^2-\ln x=0$, com $x\in[1,2]$.

2. Considere a função vectorial $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $F(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} x_1^2+x_2-1 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule a matriz Jacobiana de F e as raízes de $F(x_1,x_2)=0$.
   (b) Efectue, se possível, uma iteração do método de Newton
$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}),\qquad k=0,1,2,\ldots,$$
   partindo dos pontos $x^{(0)}=(0,0)$ e $x^{(0)}=(1,1)$.

3. Seja f uma função real de variável real, conhecida nos pontos $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2$.
   (a) Mostre que
$$P_2(x)=\sum_{i=0}^{2} l_i(x)\,f(x_i),\quad \text{com}\quad l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{2}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},$$
   é o único polinómio, de grau menor ou igual a dois, interpolador de f nos pontos dados.
   (b) A lei de Ohm diz que a tensão V nas extremidades de uma resistência percorrida por uma corrente eléctrica com intensidade I é directamente proporcional a essa intensidade de corrente. Isso só é verdade para resistências ideais; as resistências reais apresentam comportamentos menos lineares. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados para uma resistência concreta:

I	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0
V	-193	-41	0	41	193

   Atendendo ao comportamento simétrico relativamente à origem, determine o polinómio segmentado quadrático interpolador da função dada na tabela.

4. Determine o valor aproximado de $\int_4^6 xe^{-x}dx$, com duas casas decimais correctas, usando a fórmula do trapézio
$$\begin{aligned} I_T(f) &= \frac{H}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{M-1})+f(x_M)], \\ E_T(f) &= -\frac{H^2}{12}(b-a)f''(\xi),\xi\in]a,b[,\quad \text{onde}\quad H=\frac{b-a}{M}. \end{aligned}$$