Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

21 de Abril de 2009 | Duração: 1h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere $f(x) = e^x + |x+1| - 1$.
   (a) Prove analiticamente que $f(x) = 0$ tem uma e uma só raiz em $]-1, 0[$.
   (b) Determine a raiz referida na alínea anterior usando duas iterações do método de Newton
   $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
   indicando uma estimativa para o erro relativo cometido.

2. De uma função f conhece-se a tabela

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	-2	-1	6
$f'(x_i)$	0	–	12

.

   (a) Determine uma aproximação para $f'(1)$.
   $$f'(x_k) = \frac{1}{2h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})\right] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \qquad \xi \in]x_{k-1}, x_{k+1}[$$
   (b) Determine o polinómio interpolador de Hermite para f no intervalo $[0, 1]$.
   $$H_3(x) = f(x_0)h_{10}(x) + f(x_1)h_{11}(x) + f'(x_0)h_{20}(x) + f'(x_1)h_{21}(x),$$
   $$h_{10}(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}, \qquad h_{11}(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2},$$
   $$h_{20}(x) = (x - x_0)\frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}, \qquad h_{21}(x) = (x - x_1)\frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}.$$

3. (a) Determine o sistema linear que lhe permite determinar os coeficientes da recta de regressão linear, supondo conhecidos os pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, ..., n$.
   (b) Os seguintes dados mostram a relação entre número de horas que uma dada substância esteve no corpo de uma pessoa e a sua concentração no corpo (partes por milhão)

N (número de horas)	2	4	6	8
C (concentração)	2,1	1,6	1,4	1,0

.

   Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados e estime a concentração da substância após 5 horas.

4. (a) Determine os valores de A e B por forma a que a fórmula de integração
   $$\int_a^b f(x)dx \approx Af(a) + Bf(b)$$
   tenha um grau de exactidão o mais elevado possível.
   (b) Determine o valor aproximado de $\int_0^\pi \cos x dx$, com uma casa decimal correcta, usando a fórmula do trapézio
   $$I_T(f) = \frac{H}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{M-1}) + f(x_M)],$$
   $$E_T(f) = -\frac{H^2}{12}(b-a)f''(\xi), \xi \in]a, b[, \quad \text{onde} \quad H = \frac{b-a}{M}.$$