Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

15 de Abril de 2010 — Duração: 1h30m

**Nota**: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja $v(t) = e^{-t/2}\sin(2t) + 0{,}1$, $t \in [0, 6]$, a função que descreve um certo movimento vibratório.
   (a) Prove analiticamente que existe um só instante $t$ no intervalo $[1{,}5, 2]$ para o qual $v(t) = 0$.
   (b) Sabendo que $v''(t) > 0$, $t \in [1{,}5, 2]$, determine uma aproximação para a raiz de $v(t) = 0$ nesse intervalo, aplicando o método de Newton (duas iterações).
   (c) Determine uma estimativa para o erro relativo cometido na aproximação obtida na alínea anterior.

2. Considere a tabela:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -2 | -1 | 3 | 2 |

   (a) Determine a recta dos mínimos quadrados que se ajusta aos dados.
   (b) Sem recorrer à equação da recta, mostre que o ponto de coordenadas $(3/2, 1/2)$ pertence à recta dos mínimos quadrados.

3. (a) Prove a unicidade do polinómio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola a função $f(x)$ nos pontos distintos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
   (b) Mediu-se a temperatura $T$ da ebulição da água em função da pressão $P$, tendo-se obtidos os valores da tabela:

| $P$ | 20 | 40 | 60 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 250 | 260 | 290 | 310 | 320 |

   i. Determine o polinómio de grau 2, $S(P) = s_0 + s_1 P + s_2 P^2$, $s_2 \neq 0$, interpolador de $T$ em $[20, 90]$.
   ii. Usando a alínea anterior, determine uma aproximação para $T(70)$.
   iii. Obtenha o polinómio de Hermite de grau mínimo, interpolador de $T$ no intervalo $[20, 60]$.

4. (a) Deduza a fórmula do ponto médio na aproximação de $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, quando se considera a partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{M-1} < x_M = b$.
   (b) Considerando a tabela dada no problema anterior, determine uma aproximação para $I(T) = \int_{20}^{60} T(P)dP$ usando a fórmula do ponto médio.

## Formulário

**Método de Newton** $(f(x) = 0)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

**Interpolador de Lagrange**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0, \ldots, n.$$

**Fórmulas de derivação numérica**

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]; \quad f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right].$$

$$f''(x_k) \approx \frac{1}{h^2}\left[f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})\right].$$

**Fórmula do ponto médio**

$$I_{PM}(f) = h[f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + \cdots + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2})].$$