Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Deduza a expressão do método de Jacobi aplicado à resolução do sistema linear $Ax = b$.

   (b) Usando os círculos de Gershgorin, mostre que todos os valores próprios da matriz de iteração do método de Jacobi são, em módulo, inferiores a $3/4$.

   (c) Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema, qualquer que seja a aproximação inicial escolhida.

   (d) Efectue duas iterações do método de Jacobi considerando a aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0]^T$.

   (e) Determine quantas iterações do método de Jacobi devem ser efetuadas para garantir que o erro inicial, medido na norma $\|\cdot\|_\infty$, seja reduzido de um factor de 10^{-6}.

2. De uma função $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$ conhecem-se os seguintes valores

x_i	0,0	1,5	3,0	4,5	6,0
f_i	1,00	1,57	2,00	4,30	7,00

   Calcule os coeficientes a e b da função

$$g(x) = ax + b\cos x, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

   que a fazem ajustar-se, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos da tabela. Determine uma aproximação para o valor de f em 4,3.

3. Considere a equação

$$f(x) = e^x - 3x^2 = 0,$$

   que tem três raízes reais $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ tais que $\alpha_1 \in [-0{,}6,\ -0{,}4]$, $\alpha_2 \in [0{,}8,\ 1{,}0]$, $\alpha_3 \in [3{,}6,\ 3{,}8]$. Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora definida por

$$\phi(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{3}}$$

   e qualquer aproximação inicial $x^{(0)} \in [0{,}8,\ 1{,}0]$, converge para a raiz α_2 e utilize este método para obter um valor aproximado de α_2 com erro absoluto inferior a 10^{-3}.

Formulário

Método do ponto fixo $(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x))$

$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$

Fórmula de erro para o ponto fixo

$|\alpha - x^{(k)}| \leq K^k \max\{x^{(0)} - a, b - x^{(0)}\}.$

Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$

$A^T Ax = A^T b$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$A = D - L - U$

$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$