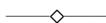


Frequência de Matemática Computacional

29 de Maio de 2008



Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear $Ax = b$ com A e b definidos por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \alpha & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 - \alpha \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

no qual α é um escalar real diferente de -1 .

- (a) Caracterize todos os valores de α para os quais o método de Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{sendo } A = D - L - U,$$

converge qualquer que seja o ponto inicial.

- (b) Considerando $\alpha = 2$, efectue duas iterações do referido método, indicando o erro cometido (a solução exacta é $\bar{x} = [2, 1, 2]^T$).

2. Seja A a matriz definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule os números de condição da matriz A associados à norma $\|\cdot\|_1$ definida por

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

- (b) Suponha que, ao resolver o sistema $Ax = b$ por eliminação de Gauss, encontra uma solução \hat{x} que satisfaz $\|A\hat{x} - b\|/\|b\| < 10^{-3}$. Determine um majorante para o erro relativo de \hat{x} .

3. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 3 \end{bmatrix}$.

Com base no teorema de Gershgorin obtenha um majorante para o maior módulo de um valor próprio de B e aproxime esse valor próprio efectuando duas iterações do método da potência.

4. Pretende resolver-se o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' = -3y + 99e^{-t}, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

usando o método de Euler implícito $u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1})$.

- (a) Deduza a ordem e o erro de truncatura local do método numérico e conclua a sua convergência.
- (b) Obtenha o valor aproximado de $y(1)$, usando o referido método, com $h = 0.5$.