Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

2 de Junho de 2009 Duração: 1h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y'(t) &= t^2 y(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$.
   (a) Prove que o problema tem uma só solução em $D = \{(t, y) : t \in [0, 1], y \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Determine
      i. a ordem de consistência e
      ii. o intervalo de estabilidade absoluta

   do método de Crank-Nicolson

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})), \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

   (c) Calcule o valor aproximado de $y(1)$ usando o método referido na alínea anterior com $h = 0,5$.

2. Seja $Ax = b$ um sistema linear. Substituindo o termo independente por $\bar{b}$ (vector aproximado de b) obtemos a solução $\bar{x}$.
   (a) Determine uma estimativa para o erro relativo de $\bar{x}$ em função do erro relativo de $\bar{b}$.
   (b) Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1{,}01 \end{bmatrix}$, com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 50{,}5 & -50 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$. Atendendo ao condicionamento da matriz A, o que poderá concluir quanto à qualidade da aproximação $\bar{x}$.

3. Considere o sistema linear $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ e o método de Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\,x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{sendo } A = D - L - U.$$

   (a) Deduza a expressão do método para um sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz de ordem n, x e b vectores de dimensão n.
   (b) Poderá concluir a convergência do método por análise directa da matriz do sistema dado?
   (c) Efectue duas iterações do referido método, partindo de $x^{(0)} = [1\ 1]^{\mathrm{T}}$. Indique uma estimativa para o erro absoluto cometido.
   (d) A sucessão gerada pelo método de Jacobi é convergente? Justifique.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1/10 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
   (a) Localize todos os valores próprios de A.
   (b) Diga como poderia determinar o menor valor próprio de A (em módulo) usando um método numérico conveniente.