Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$, e o método de Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\,x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{sendo } A = D - L - U.$$

   (a) Deduza o método.

   (b) Verifique que o método aplicado ao sistema diverge. Reordene as equações de modo a obter um sistema equivalente que lhe permita garantir que o método converge.

   (c) Efectue duas iterações do método e indique uma estimativa para o erro absoluto da aproximação obtida (considere $x^{(0)} = [0\ 0]^{\mathrm{T}}$).

   (d) Seja $\overline{x}$ barra a solução do sistema $Ax = \overline{b}$, com $\overline{b} = b + 10^{-3}[1\ 1]^{\mathrm{T}}$. Poderá assegurar que este valor constitui uma "boa aproximação"para a solução exacta x do sistema dado? Justifique.

2. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

   (a) Localize e separe todos os valores próprios de B.

   (b) Suponha que B é a matriz de iteração de um determinado método iterativo. Poderá assegurar que esse método é convergente? Justifique.

   (c) Usando a alínea (a), determine o maior valor próprio de B^{50}. Justifique.

3. Considere o método de Euler implícito

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \qquad k = 0, 1, \dots.$$

   O movimento de uma partícula pode ser regido pela seguinte equação:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0.$$

   (a) Prove que o método é consistente.

   (b) Determine o intervalo de estabilidade absoluta.

   (c) Usando o método, com $h < 1$, determine uma aproximação para $y(1)$ e $y'(1)$, sabendo que $y(0) = y'(0) = 1$.

   (d) Como poderia obter uma solução mais precisa do que a obtida na alínea anterior?