Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

5 de Junho de 2012 — Duração: 1h30m

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Prove a unicidade do polinómio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola a função $f(x)$ nos pontos distintos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

   (b) Mediu-se a distância percorrida por um automóvel ao longo do tempo. Obtiveram-se os valores da tabela seguinte, onde o tempo é medido em segundos e a distância em metros:

tempo t	0	5	13
distância d	0	115	302

   i. Determine o polinómio de grau 2 interpolador de d usando os dados da tabela.

   ii. Usando a alínea anterior, determine uma aproximação para distância percorrida ao fim de 10 segundos.

   iii. Determine uma aproximação para o erro da aproximação obtida na alínea anterior supondo que $\max\limits_{t\in[0,13]} |d'''(x)| < 0{,}1$.

   iv. Obtenha aproximações para a velocidade do automóvel quando $t = 0$ e $t = 13$, usando fórmulas de diferenças finitas.

   v. Obtenha o polinómio de Hermite de grau mínimo, interpolador de d em $t = 0$ e $t = 13$.

2. Considere a seguinte igualdade $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

   (a) Calcule o menor número de pontos que deve considerar na fórmula do trapézio por forma a aproximar o valor do integral com uma casa decimal correcta.

   (b) Calcule o valor aproximado de π de acordo com a alínea anterior (se não resolveu a alínea anterior considere 6 pontos).

3. Considere a equação diferencial
$$y'(t) = -2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Aplique o método de Heun para determinar uma aproximação para $y(0{,}5)$ com $h = 0{,}25$.

   (b) Determine o intervalo de estabilidade absoluta deste método.

Formulário

Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j},\ i = 0,\ldots,n; \qquad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Interpolador de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}[f(x_i)h_{1i}(x) + f'(x_i)h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell_i'(x_i)(x-x_i)]\ell_i(x)^2 \quad \text{e} \quad h_{2i}(x) = (x-x_i)\ell_i(x)^2, \qquad i = 0,\ldots,n.$$

Fórmulas de derivação numérica

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]; \quad f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right].$$

Fórmula do trapézio

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]; \qquad E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in]a,b[.$$

Método de Heun

$$k_1 = f(t_i, u_i);\ k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1); \qquad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2).$$