Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Matemática Computacional (Eng. Electrotécnica e de Computadores)

30 de Maio de 2013 | Teste A | Duração: 1h30m

**Nota**: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Os dados da tabela seguinte dizem respeito à esperança média de vida na Europa ocidental

| Ano | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 |
|---|---|---|---|---|
| EMV | 72,8 | 74,2 | 75,2 | 76,4 |

.

   (a) Calcule o polinómio interpolador de Lagrange usando todos os dados da tabela anterior.

   (b) Usando a alínea anterior, determine uma aproximação para a esperança média de vida em 1982.

   (c) Determine uma aproximação para a taxa de crescimento da EMV da população no ano de 1990.

2. Considere o integral

$$I = \int_0^1 (t^3 - 0{,}25)\ dt.$$

   (a) Use a fórmula dos trapézios para obter um valor aproximado de $I$ com um erro absoluto inferior a 0,05.

   (b) Mostre, sem recorrer à fórmula do erro, que a fórmula dos trapézios simples tem grau de exatidão 1.

   (c) Determine $A$ e $B$ por forma a que a fórmula dos trapézios corrigida

$$\int_0^1 f(t)\ dt \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) + Af'(0) + Bf'(1)$$

   tenha o grau de exatidão o maior possível.

3. Considere a equação diferencial

$$y' = 2ty^2$$

   com condição inicial $y(1) = 2$.

   (a) Com $h = 0{,}1$, use o método de Heun para determinar uma aproximação para $y(1{,}2)$.

   (b) Determine o intervalo de estabilidade absoluta do método de Heun.

---

**Formulário**

**Interpolador de Lagrange**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0, \ldots, n.$$

**Fórmula de erro para a interpoladora de Lagrange**

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

**Fórmulas de derivação numérica**

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]; \quad f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right].$$

**Fórmula do trapézio**

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

**Fórmula do erro para a regra do trapézios**

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi), \qquad \xi \in ]a, b[.$$

**Método de Heun**

$k_1 = f(t_i, u_i);\ k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1);$

$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$