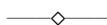


Matemática Computacional

Interpolação polinomial unidimensional



1. Considere os seguintes pontos de \mathbb{R}^2 , $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(1, -1)$ e $(3, 10)$. Determine o polinómio de Lagrange $P(x)$ que passa por esses pontos e calcule $P(0)$.
2. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de Euros)	11.2	15.3	17.1	16.9	15.0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil Euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

3. Obtenha um valor aproximado para a raiz de uma função contínua $f(x)$ da qual se conhece apenas os valores apresentados na tabela seguinte:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1

4. Seja $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de $n + 1$ números reais. Mostre que $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$, onde

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \end{aligned}$$

5. (**Exercício 3.1, p99**) Seja $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de $n + 1$ números reais igualmente espaçados. Mostre que

$$\prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \frac{n! h^{n+1}}{4},$$

sendo h o espaçamento entre aqueles pontos.

6. Seja $P(x)$ um polinómio de grau inferior ou igual n e $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, onde x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, são $n + 1$ pontos distintos. Mostre que o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$ é dado por

$$a_0 = \sum_{i=0}^n \frac{P(x_i)}{w'(x_i)}.$$

7. Considere a função $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5.

8. **(Exercício 3.2b, p99)** Obter um majorante do erro de interpolação de Lagrange para a função $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ usando os pontos

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, \dots, 4.$$

9. Seja x_{k-1}, x_k e x_{k+1} três pontos igualmente espaçados são conhecidos os valores de uma função f . Mostre que polinômio interpolador de segunda ordem é

$$\frac{2(x-x_k)(x-x_{k+1})}{h^2}f(x_{k-1}) + \frac{4(x_{k-1}-x)(x-x_{k+1})}{h^2}f(x_k) + \frac{2(x-x_k)(x-x_{k-1})}{h^2}f(x_{k+1}).$$

10. Determine uma aproximação de $\cos \frac{\pi}{8}$ usando o polinômio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$ e indique uma estimativa para o erro cometido. Determine uma estimativa para o erro se tivesse utilizado um polinômio interpolador não segmentado. Compare os resultados.
11. Determine polinômios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo $[-1, 1]$.
12. Determine o polinômio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e calcule um valor aproximado para $\cos \frac{\pi}{8}$ e para $\sin \frac{\pi}{8}$.
13. Da função $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ conhecem-se os seguintes valores tabelados

Imagem	Derivada
$f(0) = 0$	$f'(0) = 1$
$f(1) = \frac{e-1/e}{2}$	$f'(1) = \frac{e+1/e}{2}$

- (a) A partir dos valores dados, calcule o valor aproximado de $f(0.5)$, usando interpolação polinomial cúbica adequada. ($e = 2.71828182845905 \dots$)
- (b) Obtenha um majorante para o erro absoluto de interpolação cometido nessa aproximação (sem calculadora, obviamente).
14. Verificar que a recta de regressão passa pelo ponto cuja abcissa é a média dos $\{x_i\}$ e cuja ordenada é a média dos $\{f(x_i)\}$.