Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Matemática Computacional

Interpolação polinomial unidimensional

1. Considere os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$, $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$. Determine o polinómio de Lagrange $P(x)$ que passa por esses pontos e calcule $P(0)$.

2. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de Euros)	11.2	15.3	17.1	16.9	15.0

   Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil Euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

3. Obtenha um valor aproximado para a raiz de uma função contínua $f(x)$ da qual se conhece apenas os valores apresentados na tabela seguinte:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1

4. Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais. Mostre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$, onde

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \end{aligned}$$

5. **(Exercício 3.1, p99)** Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais igualmente espaçados. Mostre que

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq \frac{n!\, h^{n+1}}{4},$$

   sendo h o espaçamento entre aqueles pontos.

6. Seja $P(x)$ um polinómio de grau inferior ou igual n e $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, onde x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são $n+1$ pontos distintos. Mostre que o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$ é dado por

$$a_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{P(x_i)}{w'(x_i)}.$$

7. Considere a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5.

8. **(Exercício 3.2b, p99)** Obter um majorante do erro de interpolação de Lagrange para a função $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ usando os pontos

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, \ldots, 4.$$

9. Seja x_{k-1}, x_k e x_{k+1} três pontos igualmente espaçado são conhecidos os valores de uma função f. Mostre que polinómio interpolador de segunda ordem é

$$\frac{2(x - x_k)(x - x_{k+1})}{h^2} f(x_{k-1}) + \frac{4(x_{k-1} - x)(x - x_{k+1})}{h^2} f(x_k) + \frac{2(x - x_k)(x - x_{k-1})}{h^2} f(x_{k+1}).$$

10. Determine uma aproximação de $\cos\frac{\pi}{8}$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$ e indique um estimativa para o erro cometido. Determine uma estimativa para o erro se tivesse utilizado um polinómio interpolador não segmentado. Compare os resultados.

11. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

12. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e calcule um valor aproximado para $\cos\frac{\pi}{8}$ e para $\sin\frac{\pi}{8}$.

13. Da função $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ conhecem-se os seguintes valores tabelados

Imagem	Derivada
$f(0) = 0$	$f'(0) = 1$
$f(1) = \frac{e-1/e}{2}$	$f'(1) = \frac{e+1/e}{2}$

   (a) A partir dos valores dados, calcule o valor aproximado de $f(0.5)$, usando interpolação polinomial cúbica adequada. ($e = 2.71828182845905\ldots$)

   (b) Obtenha um majorante para o erro absoluto de interpolação cometido nessa aproximação (sem calculadora, obviamente).

14. Verificar que a recta de regressão passa pelo ponto cuja abcissa é a média dos $\{x_i\}$ e cuja ordenada é a média dos $\{f(x_i)\}$.