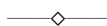


### Matemática Computacional

#### Interpolação polinomial unidimensional



1. Considere os seguintes pontos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(-3, 1)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(1, -1)$  e  $(3, 10)$ . Determine o polinómio de Lagrange  $P(x)$  que passa por esses pontos e calcule  $P(0)$ .
2. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de Euros)	11.2	15.3	17.1	16.9	15.0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil Euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

3. Obtenha um valor aproximado para a raiz de uma função contínua  $f(x)$  da qual se conhece apenas os valores apresentados na tabela seguinte:

$x_i$	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1

4. Seja  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto de  $n + 1$  números reais. Mostre que  $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$ , onde

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \end{aligned}$$

5. (**Exercício 3.1, p99**) Seja  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto de  $n + 1$  números reais igualmente espaçados. Mostre que

$$\prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \frac{n! h^{n+1}}{4},$$

sendo  $h$  o espaçamento entre aqueles pontos.

6. Seja  $P(x)$  um polinómio de grau inferior ou igual  $n$  e  $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ , onde  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , são  $n + 1$  pontos distintos. Mostre que o coeficiente do termo de maior grau de  $P(x)$  é dado por

$$a_0 = \sum_{i=0}^n \frac{P(x_i)}{w'(x_i)}.$$

7. Considere a função  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de  $f(x)$  por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5.

8. **(Exercício 3.2b, p99)** Obter um majorante do erro de interpolação de Lagrange para a função  $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$  usando os pontos

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, \dots, 4.$$

9. Seja  $x_{k-1}, x_k$  e  $x_{k+1}$  três pontos igualmente espaçados são conhecidos os valores de uma função  $f$ . Mostre que polinômio interpolador de segunda ordem é

$$\frac{2(x - x_k)(x - x_{k+1})}{h^2}f(x_{k-1}) + \frac{4(x_{k-1} - x)(x - x_{k+1})}{h^2}f(x_k) + \frac{2(x - x_k)(x - x_{k-1})}{h^2}f(x_{k+1}).$$

10. Determine uma aproximação de  $\cos \frac{\pi}{8}$  usando o polinômio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo  $[0, \pi]$  e indique uma estimativa para o erro cometido. Determine uma estimativa para o erro se tivesse utilizado um polinômio interpolador não segmentado. Compare os resultados.
11. Determine polinômios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função  $f(x) = x^3$  no intervalo  $[-1, 1]$ .
12. Determine o polinômio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função  $f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e calcule um valor aproximado para  $\cos \frac{\pi}{8}$  e para  $\sin \frac{\pi}{8}$ .
13. Da função  $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$  conhecem-se os seguintes valores tabelados

Imagem	Derivada
$f(0) = 0$	$f'(0) = 1$
$f(1) = \frac{e-1/e}{2}$	$f'(1) = \frac{e+1/e}{2}$

- (a) A partir dos valores dados, calcule o valor aproximado de  $f(0.5)$ , usando interpolação polinomial cúbica adequada. ( $e = 2.71828182845905 \dots$ )
- (b) Obtenha um majorante para o erro absoluto de interpolação cometido nessa aproximação (sem calculadora, obviamente).
14. Verificar que a recta de regressão passa pelo ponto cuja abcissa é a média dos  $\{x_i\}$  e cuja ordenada é a média dos  $\{f(x_i)\}$ .