Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Computacional (Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

Folha 2: Aproximação de funções — Ano lectivo 2008/09

1. Considere os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$, $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$. Determine o polinómio de Lagrange $p(x)$ que passa por esses pontos e calcule $p(0)$.

2. Determine aproximações de $\cos\frac{\pi}{8}$ usando os polinómios interpoladores de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0,\pi]$. Compare os resultados obtidos e indique majorantes do erro.

3. Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais. Mostre que, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1$, onde
$$\begin{aligned}\ell_i(x) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.\end{aligned}$$

4. **(Exercício 3.1, p99)** Seja $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais igualmente espaçados. Mostre que
$$\prod_{i=0}^{n} |x-x_i| \leq \frac{n!\ h^{n+1}}{4},$$
sendo h o espaçamento entre aqueles pontos.

5. Seja $p(x)$ um polinómio de grau inferior ou igual n e $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, onde x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, são $n+1$ pontos distintos. Mostre que o coeficiente do termo de maior grau de $p(x)$ é dado por
$$a_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{p(x_i)}{w'(x_i)}.$$

6. Considere a função $f(x) = \cos x, x \in [0,\pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0,5.

7. Considere a função $f(x) = \sin x$, definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   (a) Determine o menor número de pontos que deve considerar no intervalo dado para que o erro da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0,1.

   (b) Sabendo que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ utilizando um polinómio interpolador de ordem 2.

8. **(Exercício 3.2b, p99)** Obter um majorante do erro de interpolação de Lagrange para a função $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ usando os pontos
$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, \ldots, 4.$$

9. Seja x_{k-1}, x_k e x_{k+1} três pontos igualmente espaçado onde são conhecidos os valores de uma função f. Mostre que, se a distância entre os pontos for de $h/2$, o polinómio interpolador de grau 2 é dado por
$$\frac{2(x-x_k)(x-x_{k+1})}{h^2}f(x_{k-1}) + \frac{4(x_{k-1}-x)(x-x_{k+1})}{h^2}f(x_k) + \frac{2(x-x_k)(x-x_{k-1})}{h^2}f(x_{k+1}).$$

10. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de euros)	11,2	15,3	17,1	16,9	15.0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

11. Obtenha um valor aproximado para a raiz de uma função contínua $f(x)$ da qual se conhece apenas os valores apresentados na tabela seguinte:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12,5	1,5	-1

12. Determine uma aproximação de $\cos \frac{\pi}{8}$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$ e indique um estimativa para o erro cometido. Compare esta estimativa com a obtida no problema 2.

13. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

14. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e calcule um valor aproximado para $\cos \frac{\pi}{8}$ e para $\sin \frac{\pi}{8}$.

15. Determine o polinómio de grau mínimo que seja concordante[1] com a recta $y = -2 + \frac{1}{2}(8 - x)$, no ponto $(8, -2)$, e com a circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, no ponto $(1, -1)$.

16. Da função $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ conhecem-se os seguintes valores tabelados:

x_i	0	1
$f(x_i)$	0	$\frac{e-1/e}{2}$
$f'(x_i)$	1	$\frac{e+1/e}{2}$

   (a) A partir dos valores dados, calcule o valor aproximado de $f(0.5)$, usando interpolação polinomial cúbica adequada. ($e = 2{,}71828182845905\ldots$)

   (b) Obtenha um majorante para o erro absoluto de interpolação cometido nessa aproximação (sem calculadora, obviamente).

17. Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente graficamente): (a) $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,12)$; (b) $(-1,2)$, $(1,-3)$, $(2,-5)$, $(0,0)$.

18. O proprietário de uma empresa em rápido crescimento económico verificou que, nos primeiros seis anos, o lucro, L, da sua empresa em função do número de anos decorridos, N, poderia ser aproximado por uma transformação linear $L = a + bN$. Atendendo a que os resultados do seu negócio foram

N (número de anos)	0	1	3	6
L (lucro, em milhares de euros)	0	1	3	4

determine:

   (a) a recta dos mínimos quadrados para o problema descrito;

   (b) um valor para o lucro previsível no final do sétimo ano.

19. **(Exercício 3.13, p100)** Verificar que a recta de regressão passa pelo ponto cuja abcissa é a média dos $\{x_i\}$ e cuja ordenada é a média dos $\{f(x_i)\}$.

[1] Duas curvas dizem-se concordantes se tiverem a mesma tangente no ponto de união.