Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Computacional (Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

Folha 2: Aproximação de funções Ano lectivo 2009/2010

1. Considere os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$, $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$. Determine o polinómio interpolador de Lagrange $P(x)$ que passa por esses pontos e calcule $P(0)$.

2. Determine aproximações de $\cos\frac{\pi}{8}$ usando os polinómios interpoladores de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0,\pi]$. Compare os resultados obtidos e indique majorantes do erro.

3. **(Matlab)** Considere os seguintes pontos de $\mathbb{R}^2$, (-2,1), (-1,0), (1,-3) e (4,8). Determine o polinómio interpolador $P(x)$ que passa por esses pontos e calcule $P(0)$.

4. **(Matlab)** Considere a função $f(x)=\sin x$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$. Trace os gráficos dos polinómios interpoladores de f para diferentes valores de n (grau do polinómio).

5. Seja $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais. Mostre que, $\sum_{i=0}^{n}\ell_i(x)=1$, onde

$$\begin{aligned}\ell_i(x) &= \prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.\end{aligned}$$

6. Seja $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ um conjunto de $n+1$ números reais igualmente espaçados. Mostre que

$$\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|\leq\frac{n!\;h^{n+1}}{4},$$

sendo h o espaçamento entre aqueles pontos.

7. Seja $P(x)$ um polinómio de grau inferior ou igual a n e $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, onde x_i, $i=0,1,\ldots,n$, são $n+1$ pontos distintos. Mostre que o coeficiente do termo de maior grau de $P(x)$ é dado por

$$a_0=\sum_{i=0}^{n}\frac{P(x_i)}{w'(x_i)}.$$

8. Considere a função $f(x)=\cos x, x\in[0,\pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0,5.

9. Considere a função $f(x)=\sin x$, definida em $[0,\frac{\pi}{2}]$.

   (a) Determine o menor número de pontos que deve considerar no intervalo dado para que o erro da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0,1.

   (b) Sabendo que $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ utilizando um polinómio interpolador de ordem 2.

10. Considere a função $f(x)=\cos(x)+\sin(x)$ e os pontos

$$x_k=-\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{4},\quad k=0,1,\ldots,4.$$

Determine um majorante do erro que se comete na aproximação de f por um polinómio interpolador de Lagrange definido nesses pontos.

11. Seja x_{k-1}, x_k e x_{k+1} três pontos igualmente espaçados, com distância $h/2$, onde são conhecidos os valores de uma função f. Mostre que o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2 é dado por

$$\frac{2(x-x_k)(x-x_{k+1})}{h^2}f(x_{k-1})+\frac{4(x_{k-1}-x)(x-x_{k+1})}{h^2}f(x_k)+\frac{2(x-x_k)(x-x_{k-1})}{h^2}f(x_{k+1}).$$

12. **(Matlab)** A temperatura do ar próximo do solo depende da concentração K em ácido carbónico (H_2CO_3). A tabela representa a variação $\delta_K = \theta_K - \theta_{\overline{K}}$ da temperatura média relativamente a uma temperatura de referência $\overline{K}$, para diferentes latitudes e valores de K.

	δ_K			
Latitude	$K = 0{,}67$	$K = 1{,}5$	$k = 2{,}0$	$K = 3{,}0$
65	$-3{,}1$	3,52	6,05	9,3
55	$-3{,}22$	3,62	6,02	9,3
45	$-3{,}3$	3,65	5,92	9,17
35	$-3{,}32$	3,52	5,7	8,82
25	$-3{,}17$	3,47	5,3	8,1
15	$-3{,}07$	3,25	5,02	7,52
5	$-3{,}02$	3,15	4,95	7,3
-5	$-3{,}02$	3,15	4,97	7,35
-15	$-3{,}12$	3,2	5,07	7,62
-25	$-3{,}2$	3,27	5,35	8,22
-35	$-3{,}35$	3,52	5,62	8,8
-45	$-3{,}37$	3,7	5,95	9,25
-55	$-3{,}25$	3,7	6,1	9,5

(a) Recorra ao polinómio interpolador dos dados para comparar a variação da temperatura, em função da latitude, para os diferentes valores de K. Trace os respectivos gráficos.

(b) Use a alínea anterior para estimar o valor da variação de temperatura δ_K para um local cuja latitude é igual a 23. Considere $K = 0{,}67$.

13. **(Matlab)** Um paraquedista efectuou 5 saltos de diferentes alturas, tendo medido a distância a um alvo constituído por uma circunferência de raio 5 metros traçada no solo. Supondo que as respectivas altura e distância de cada salto satisfazem a seguinte tabela

Altura do salto (m)	1500	1250	1000	750	500
Distância do alvo (m)	35	25	15	10	7

recorra à interpolação para estimar a distância do alvo a que o paraquedista caíria se saltasse de uma altura de 850m.

14. **(Matlab)** Os jactos de água dos repuxos da Avenida Sá da Bandeira descrevem uma trajectória parabólica. Para obter a expressão dessa trajectória foram realizadas as seguintes medições:

Distância (eixo horizontal)	0	1/4	1/3	1	3/2	2
Altura da água	0	21/16	5/3	3	9/4	0

Recorra à interpolação para obter a respectiva trajectória.

15. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de euros)	11,2	15,3	17,1	16,9	15,0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

16. Obtenha um valor aproximado para a raiz de uma função contínua $f(x)$ da qual se conhece apenas os valores apresentados na tabela seguinte:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12,5	1,5	-1

17. Determine uma aproximação de $\cos\frac{\pi}{8}$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$ e indique um estimativa para o erro cometido. Compare esta estimativa com a obtida no problema 2.

18. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

19. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e calcule um valor aproximado para $\cos\frac{\pi}{8}$ e para $\sin\frac{\pi}{8}$.

20. Determine o polinómio de grau mínimo que seja concordante[1] com a recta $y = -2 + \frac{1}{2}(8 - x)$, no ponto $(8, -2)$, e com a circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, no ponto $(1, -1)$.

21. Da função $f(x) = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ conhecem-se os seguintes valores tabelados:

x_i	0	1
$f(x_i)$	0	$\frac{e-1/e}{2}$
$f'(x_i)$	1	$\frac{e+1/e}{2}$

   (a) A partir dos valores dados, calcule o valor aproximado de $f(0{,}5)$, usando interpolação polinomial cúbica adequada. ($e = 2{,}71828182845905\ldots$)

   (b) Obtenha um majorante para o erro absoluto da aproximação obtida na alínea anterior (sem calculadora, obviamente).

22. **(Matlab)** Dada a função $f(x) = x(x - 2\pi)e^{-x}$, para $x \in [0, 2\pi]$, determine a interpoladora trigonométrica de f em 10 nós equidistantes. Compare o respectivo gráfico com o gráfico de f.

23. **(Matlab)** Considere a função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ definida no intervalo [-5,5].

   (a) Trace o gráfico de alguns polinómios interpoladores de $f(x)$ em pontos equidistantes e compare-os com o gráfico da função.

   (b) Repita o procedimento da alínea anterior usando os nós de Chebyshev. Que pode concluir?

24. **(Matlab)** Considere a função $f(x) = \sin(2\pi x)$ em 21 nós equidistantes, x_i, $i = 1, 2, ..., 21$, no intervalo $[-1, 1]$. Determine:

   (a) o polinómio interpolador nos referidos pontos;

   (b) o spline cúbico de interpolação;

   (c) compare o gráfico das duas funções obtidas com o de f;

   (d) repita os cálculos anteriores usando o seguinte conjunto de dados perturbados:

$$f(x_i) = \sin(2\pi x_i) + (-1)^{i+1}10^{-4}, \qquad i = 1, 2, ..., 21.$$

25. **(Matlab)** Os seguintes valores

Caudal	0	35	0,125	5	0	5	1	0,5	0,125	0

representam os valores do caudal sanguíneo numa secção transversal da artéria carótida observados durante um batimento cardíaco. A frequência de registo dos dados é constante e igual a $10/T$, onde $T = 1$ s é o periodo do batimento. Representar estes dados por uma função contínua de período igual a T.

[1] Duas curvas dizem-se concordantes se tiverem a mesma tangente no ponto de união.

26. Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente graficamente): (a) $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,12)$; (b) $(-1,2)$, $(1,-3)$, $(2,-5)$, $(0,0)$. Faça a sua representação gráfica.

27. O proprietário de uma empresa em rápido crescimento económico verificou que, nos primeiros seis anos, o lucro, L, da sua empresa em função do número de anos decorridos, N, poderia ser aproximado por uma transformação linear $L = a + bN$. Atendendo a que os resultados do seu negócio foram

N (número de anos)	0	1	3	6
L (lucro, em milhares de euros)	0	1	3	4

,

determine:

(a) a recta dos mínimos quadrados para o problema descrito;

(b) um valor para o lucro previsível no final do sétimo ano.

28. Verificar que a recta de regressão passa pelo ponto cuja abcissa é a média dos $\{x_i\}$ e cuja ordenada é a média dos $\{f(x_i)\}$.

29. **(Matlab)** Considera-se um teste mecânico para estabelecer a relação entre tensões e deformações relativas a uma amostra de tecido biológico. Partindo dos valores da tabela

Teste	Tensão	Deformação
1	0,00	0,00
2	0,06	0,08
3	0,14	0,14
4	0,25	0,20
5	0,31	0,23
6	0,47	0,25
7	0,60	0,28
8	0,70	0,29

(a) determine o polinómio interpolador;

(b) obtenha o spline cúbico natural;

(c) mostre que a recta dos mínimos quadrados é definida pela equação $y = 0{,}3741x + 0{,}0654$;

(d) estime o valor da deformação correspondente a uma tensão igual a 0,9.

30. **(Matlab)** Pretende-se aproximar a trajectória plana de um robot (idealizado como um ponto material) durante um ciclo de trabalho numa indústria. O robot deverá satisfazer algumas restrições: estar parado no ponto do plano $(0,0)$ no instante inicial ($t = 0$), deslocar-se até ao ponto $(1,2)$ em $t = 1$, atingir o ponto $(4,4)$ em $t = 2$, parar e iniciar de novo o movimento para atingir o ponto $(3,1)$ em $t = 3$, voltar à sua posição inicial em $t = 5$, parar e recomeçar um novo ciclo de trabalho. Para encontrar a trajectória do robot, proceda do seguinte modo: divida o intervalo de tempo $[0,5]$ em dois subintervalos $[0,2]$ e $[2,5]$. Em cada um dos subintervalos obtenha um spline que interpole os dados e tenha derivada nula nos extremos. Trace o respectivo gráfico.