Matemática Computacional

Diferenciação e integração numéricas

1. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função v

t_i	0	60	120	180	240	300
$v(t_i)$	0.0000	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.229

   (a) Determine uma aproximação para $v'(180)$ usando: i. Diferenças progressivas; ii. Diferenças regressivas; iii. Diferenças centradas.

   (b) Como poderia proceder para determinar uma aproximação para $v'(300)$? Justifique.

2. **(Exercício 4.3, p120)** Calcular a ordem de precisão em h (distância entre os pontos) da seguinte fórmula para a aproximação numérica $f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-2})-6f(x_{i-1})+3f(x_i)+2f(x_{i+1})}{6h}$.

3. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função f

x_i	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
$f(x_i)$	0.0	0.6	1.0	1.2	1.3

   (a) Determine aproximações para $f'(3.3)$ usando interpolação linear e interpolação quadrática.

   (b) Determine aproximações para $f'(3.1)$ e $f'(3.5)$ usando interpolação linear.

   (c) Determine o polinómio interpolador de Hermite de f no suporte $\{3.1, 3.5\}$.

4. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Se uma esfera de metal aquecida a 90^oC é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, a temperatura da esfera toma os seguintes valores

Tempo (min.)	0	5	10	15	20	25
Temperatura (C)	90	62.5	45.8	35.6	29.5	25.8

   Use diferenciação numérica para aproximar $\frac{dT}{dt}$ em cada momento.

5. **(Exercício 4.5, p120)** Determinar o número mínimo M de subintervalos para aproximar, usando a fórmula composta do ponto médio com erro inferior a 10^{-4}, os integrais das seguintes funções: $f_1(x) = \frac{1}{1+(x-\pi)^5}$ em $[0, 5]$, $f_2(x) = e^x \cos(x)$, em $[0, \pi]$ e $f_3(x) = \sqrt{x(1-x)}$, em $[0, 1]$.

6. Determine valores aproximados para $\int_0^1 e^{-x}\, dx$, usando a fórmula do trapézio. Indique um limite superior para o erro cometido em cada um dos casos.

7. Seja $I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}\, dx$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar na fórmula do trapézio por forma a que o erro cometido no cálculo aproximado do integral não exceda 0.5×10^{-3}?

   (b) Calcule o valor aproximado de I de acordo com a alínea anterior.

   (c) Repita as alíneas anteriores usando, agora, a fórmula de Simpson.

8. **(Exercício 4.10, p121)** Seja I_1 e I_2 os valores obtidos pela fórmula composta do trapézio, aplicada com dois passos de comprimentos diferentes H_1 e H_2, ao cálculo aproximado de $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Verificar que, se f'' variar pouco em $]a, b[$, o valor

$$I_R = I_1 + \frac{I_1 - I_2}{(H_2/H_1)^2 - 1}$$

dá uma melhor aproximação de $I(f)$ do que I_1 e I_2. Esta técnica designa-se por método de extrapolação de Richardson.

9. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.00	0.83	0.71	0.62	0.36	0.30

.

   (a) Será possível calcular um valor aproximado para o integral $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, usando a fórmula de Simpson ou a regra dos trapézios, através da tabela, com um erro que não exceda 10^{-3}? Justifique a sua resposta.

   (b) Calcule um valor aproximado de I e indique uma estimativa para o erro cometido.

10. Pretende calcular-se um valor aproximado para o integral $I = \int_1^2 \ln \frac{1}{x}\,dx$.

   (a) Use a fórmula de Simpson para obter I com 3 casas decimais correctas.

   (b) Sem calcular o valor exacto de I, diga, justificando, se a aproximação calculada é por defeito ou por excesso.

11. Considere a seguinte equação diferencial $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. A solução desta equação é da forma $y(t) = y(0)e^{-\int_0^t a(s)ds}$. Sabendo que $a(0) = 1$, $a(1) = 2$, $a(2) = 1$ e que $y(0) = 1$, determine uma aproximação para $y(2)$.

12. Determine o comprimento aproximado do arco do gráfico da função $f(x) = x^3 - x$, entre os pontos $(-1, 0)$ e $(2, 6)$, usando a fórmula do trapézio composta, com quatro sub-intervalos.

13. Considere a função $f(x) = e^x + 2x$.

   (a) Calcule uma aproximação para a raiz de $f(x)$ aplicando o método de Newton duas vezes.

   (b) Utilizando a fórmula de Simpson, aproxime, com um erro não superior a 10^{-6}, a área da região limitada por $y \leq e^x$, $y \geq -2x$ e $x \leq 0$.

14. A quantidade de massa que entra ou é libertada por um reactor num dado período de tempo é dada por $M = \int_{t_1}^{t_2} Qc\,dt$ onde t_1 e t_2 são os momentos inicial e terminal, respectivamente. Usando integração numérica determine M para $Q = 5\text{m}^3/\text{min}$ e os dados da tabela:

t (min.)	0	10	20	30	40	50
c (mg/m^3)	10.00	35.00	54.73	52.16	37.07	34.06

15. Construa uma regra de integração da forma

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{1}{2}) + A_1 f(0) + A_2 f(\frac{1}{2})$$

de modo a ser exacta para polinómios de grau inferior ou igual a 2.