Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Computacional (Engenharia Electrotécnica e de Computadores)

Folha 3: Derivação e integração numéricas — Ano lectivo 2009/2010

1. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função v:

t_i	0	60	120	180	240	300
$v(t_i)$	0,0000	0,0824	0,2747	0.6502	1,3851	3,229

.

   (a) Determine uma aproximação para $v'(180)$ usando: i. Diferenças progressivas; ii. Diferenças regressivas; iii. Diferenças centradas.

   (b) Como poderia proceder para determinar uma aproximação para $v'(300)$? Justifique.

2. Calcule a ordem de precisão da seguinte fórmula para a aproximação numérica

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-2}) - 6f(x_{i-1}) + 3f(x_i) + 2f(x_{i+1})}{6h},$$

onde h é distância entre os pontos x_j, $j = i-2, ..., i+1$.

3. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função f:

x_i	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x_i)$	0,0	0,6	1,0	1,2	1,3

.

   (a) Determine aproximações para $f'(3{,}1)$ e $f'(3{,}5)$ usando interpolação linear.

   (b) Determine aproximações para $f''(3{,}3)$.

   (c) Determine o polinómio interpolador de Hermite de f no suporte $\{3{,}1; 3{,}5\}$.

4. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Se uma esfera de metal aquecida a 90^{o}C é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, a temperatura da esfera toma os seguintes valores:

Tempo (min.)	0	5	10	15	20	25
Temperatura (^{o}C)	90	62,5	45,8	35,6	29,5	25,8

.

   (a) Use diferenciação numérica para aproximar $\frac{dT}{dt}$ em cada momento.

   (b) Use a alínea anterior para obter uma estimativa para a constante de proporcionalidade k.

5. **(Matlab)** Os valores seguintes representam a evolução no tempo do número $n(t)$ de indivíduos de uma dada população.

t (meses)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$n(t)$	100	147	178	192	197	199	200

.

Utilizar estes dados para aproximar a taxa de variação desta população, usando diferentes fórmulas. Em seguida, comparar com a taxa exacta $n'(t) = 2n(t) - 0{,}01n^2(t)$.

6. **(Matlab)** Considere-se o deslocamento de um carro numa recta. Use os dados da tabela (tempo gasto e distância percorrida) para aproximar o valor da velocidade nos instantes referidos.

Tempo (s)	0	3	5	8	10	13
Distância percorrida (m)	0	225	383	623	742	993

7. **(Matlab)** Considere a função $f(x) = e^{-2x} - x$.

   (a) Determine o valor exacto de $f'(2)$.

   (b) Aproxime o valor de $f'(2)$, recorrendo a diferenças centradas, com $h = 0{,}5$, ou seja, usando os pontos $x = 2 \pm 0{,}5$. A seguir, diminua os incrementos h de 0,1 até $h = 0{,}1$.

   (c) Repita o procedimento da alínea anterior com diferenças progressivas e regressivas.

   (d) Compare os valores obtidos nas duas alíneas anteriores e compare com o valor exacto da derivada.

8. **(Matlab)** Os dados da tabela indicam a altura h em diferentes instantes dum foguetão espacial em movimento ascendente vertical. Use diferenciação numérica para completar a tabela.

Tempo (s)	0	4	8	12	16	20
Altura (km)	0	0,84	3,53	8,41	15,97	27,00
Velocidade (km/s)						

9. Determine valores aproximados para

$$\int_0^1 e^{-x} dx,$$

usando a fórmula do trapézio. Indique um limite superior para o erro cometido em cada um dos casos.

10. Seja $I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x} dx$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar na fórmula do trapézio por forma a que o erro cometido no cálculo aproximado do integral não exceda $0{,}5 \times 10^{-3}$?

   (b) Calcule o valor aproximado de I de acordo com a alínea anterior.

   (c) Repita as alíneas anteriores usando, agora, a fórmula de Simpson.

11. Seja I_1 e I_2 os valores obtidos pela fórmula composta do trapézio, aplicada com dois passos de comprimentos diferentes H_1 e H_2, ao cálculo aproximado de $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Verifique que, se f'' variar pouco em $]a, b[$, o valor

$$I_R = I_1 + \frac{I_1 - I_2}{(H_2/H_1)^2 - 1}$$

dá uma melhor aproximação de $I(f)$ do que I_1 e I_2. Esta técnica designa-se por método de extrapolação de Richardson.

12. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$:

x_i	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x_i)$	1,00	0,83	0,71	0,62	0,36	0,30

   (a) Será possível calcular um valor aproximado para o integral $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, usando a fórmula de Simpson ou a regra dos trapézios, através da tabela, com um erro que não exceda 10^{-3}? Justifique a sua resposta.

   (b) Calcule um valor aproximado de I e indique uma estimativa para o erro cometido.

13. Pretende calcular-se um valor aproximado para o integral $I = \int_1^2 \ln \frac{1}{x} dx$.

   (a) Use a fórmula de Simpson para obter I com 3 casas decimais correctas.

   (b) Sem calcular o valor exacto de I, diga, justificando, se a aproximação calculada é por defeito ou por excesso.

14. Considere a seguinte equação diferencial $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. A solução desta equação é da forma $y(t) = y(0)e^{-\int_0^t a(s)ds}$. Sabendo que $a(0) = 1$, $a(1) = 2$, $a(2) = 1$ e que $y(0) = 1$, determine uma aproximação para $y(2)$.

15. A quantidade de massa que entra ou é libertada por um reactor num dado período de tempo é dada por $M = \int_{t_1}^{t_2} Qcdt$ onde t_1 e t_2 são os momentos inicial e terminal, respectivamente. Usando integração numérica determine M para $Q = 5\text{m}^3/\text{min}$ e os dados da tabela:

t (min.)	0	10	20	30	40	50
c (mg/m^3)	10,00	35,00	54,73	52,16	37,07	34,06

.

16. Construa uma regra de integração da forma

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{1}{2}) + A_1 f(0) + A_2 f(\frac{1}{2})$$

de modo a ser exacta para polinómios de grau inferior ou igual a 2.

17. **(Matlab)** Determine uma aproximação do valor do integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

usando uma regra de integração apropriada.

18. **(Matlab)** Um carro de corrida completa uma volta num circuito em 84 s. A velocidade do carro em diferentes instantes é dada na seguinte tabela.

Tempo (s)	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
Velocidade (m/s)	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

.

Determine um valor aproximado do comprimento do circuito.

19. **(Matlab)** Determine um valor aproximado do integral

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx,$$

usando a regra de Simpson adaptativa.

20. **(Matlab)** Determine o comprimento aproximado do arco do gráfico da função $f(x) = x^3 - x$, entre os pontos (-1,0) e (2,6), usando a fórmula do trapézio composta, com 4 subintervalos.

21. **(Matlab)** Considere a função $f(x) = e^x + 2x$.

   (a) Calcule uma aproximação para a raiz de $f(x)$ aplicando o método de Newton 2 vezes.

   (b) Utilizando a fórmula de Simpson, aproxime a área da região limitada por $y \leq e^x$, $y \geq -2x$ e $x \leq 0$.

22. **(Matlab)** Determine o número mínimo de subintervalos para aproximar, usando a fórmula composta do ponto médio com erro inferior a 10^{-4}, os integrais das seguintes funções: $f_1(x) = \frac{1}{1+(x-\pi)^5}$, em [0,5], $f_2(x) = e^x \cos x$, em $[0, \pi]$ e $f_3(x) = \sqrt{x(1-x)}$, em [0,1].

23. **(Matlab)** Consideremos um condutor eléctrico esférico de raio arbitrário r e condutividade σ. Pretendemos calcular a distribuição da densidade de corrente $\mathbf{j}$ em função de r e t (tempo), conhecendo a distribuição inicial da densidade de corrente $\rho(r)$. O problema pode ser resolvido usando as relações entre a densidade de corrente, o campo eléctrico e a densidade de carga e observando que, pela simetria da configuração, $\mathbf{j}(r,t) = j(r,t)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, em que $j = |\mathbf{j}|$. Obtém-se

$$j(r,t) = \gamma(r)e^{-\sigma t/\varepsilon_0}, \ \gamma(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\int_0^r \rho(\xi)\xi^2 \, d\xi,$$

onde $\varepsilon_0 = 8{,}859 \times 10^{-12}$ farad/m é a constante dieléctrica do vazio. Usando a fórmula de Simpson composta, determine a função $\gamma(r)$, para $r = k/10$ m com k=1,...,10, $\rho(\xi) = e^{\xi}$ e $\sigma = 0{,}36$ W/(mK). (Recorde que: m=metros, W=watts, K=graus Kelvin).

24. **(Matlab)** A fim de planificar uma sala para raios infravermelhos, estamos interessados em calcular a energia emitida por um corpo negro (isto é, um objecto capaz de irradiar em todo o espectro à temperatura ambiente) no espectro (infravermelho) compreendido entre os comprimentos de onda 3 μm e 14 μm. A solução deste problema obtém-se calculando o integral

$$E(T) = 2{,}39 \times 10^{-11} \int_{3\times 10^{-4}}^{14\times 10^{-4}} \frac{dx}{x^5(e^{1{,}432/(Tx)-1})},$$

que é a equação de Planck para a energia $E(T)$, onde x é o comprimento de onda (em cm) e T a temperatura (em Kelvin) do corpo negro. Recorra à fórmula de Simpson para determinar a função $E(T)$, com $T = 213$ K.