1. Mostre que o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{1}{1+y^2} \\ y(a) &= \alpha \end{cases}$, para $t \in [a, b]$, tem solução única.

2. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine, usando o método de Euler progressivo (ou explícito)
$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i),$$
o valor aproximado de $y(1)$, fazendo $h = 1$, $h = 0{,}5$ e $h = 0{,}25$. Compare os resultados obtidos sabendo que a solução exacta é $y(t) = e^{-2t}$.

3. Num circuito de voltagem aplicada E, resistência R, inductância L e capacitância C em paralelo, a corrente I satisfaz a equação diferencial
$$I' = CE'' + \frac{E'}{R} + \frac{E}{L}.$$
Suponha que $C = 0{,}3$ $farad$, $R = 1{,}4$ ohm, $L = 1{,}7$ $henry$ e a voltagem é dada pela equação $E(t) = e^{-0{,}06\pi t} \sin(2t - \pi)$. Se $I(0) = 0$, determine o valor da corrente I para $t = 0{,}2j$, para $j = 1, \ldots, 5$, usando o método de Euler progressivo.

4. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -50y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ e os métodos de Euler progressivo e Euler regressivo (ou impícito)
$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}).$$
Usando cada um dos métodos determine a solução do problema em $t = 1$ com $h < 1$, comparando os resultados obtidos.

5. Prove que os métodos de Euler progressivo e regressivo são consistentes e determine a sua ordem e erro de truncatura local.

6. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -ty^2 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(1)$, usando o método de Crank-Nicolson (ou dos trapézios)
$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$
usando $h < 1$.

7. Determine as regiões de estabilidade absoluta do métodos de Euler, Euler regressivo e trapézios.

8. Mostre que os métodos dos trapézios e Euler regressivo são A-estáveis.

9. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= ty^2 \\ y(1) &= 2 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(1{,}1)$, usando o método de Heun:
$$k_1 = f(t_i, u_i), \quad k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1), \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

10. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= y - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(0{,}8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

11. Mostre que, quando o segundo membro f não depende de y, o método de Runge-Kutta de quarta ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson.

12. **(Exercício 7.8, p238)** Mostre que o método de Heun é absolutamente estável se $-2 \leq h\lambda \leq 0$, em que λ é um real negativo.

13. **(Exercício 7.14, p238)** O método de Euler modificado é definido por:

$$u_{i+1}^{*} = u_i + hf(t_i, u_i), \qquad u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}^{*}).$$

Determinar a condição sobre h para que este método seja absolutamente estável.

14. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$, onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante, respectivamente, (em graus Celsius), e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considerando que uma esfera de metal aquecida a 90^oC é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, use um método numérico para calcular quanto tempo leva a esfera a arrefecer até aos 30^oC se $k = 0{,}1$ min^{-1}.

15. Considere a equação diferencial $y'' + 4ty' + 2y^2 = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Com $h = 0{,}1$, utilize os métodos de Euler progressivo e de Heun para obter aproximações para $y(0{,}5)$ e $y'(0{,}5)$.

16. A equação de Van der Pol

$$u'' - \mu\left(u^2 - 1\right)u' + u = 0,\ \ \mu > 0,$$

é um modelo para o fluxo de corrente num tubo de vácuo com três elementos internos. Seja $\mu = 0{,}5$ e $u\,(0) = 0$, $u'\,(0) = 1$. Aproxime $u\,(1)$ e $u'\,(1)$ usando o método de Euler regressivo, com medida do passo $h = 0{,}5$.

17. Determine a solução aproximada do problema

$$\begin{cases} -y'' + y = x, & x \in]0,1[, \\ y(0) = y(1) = 0, & \end{cases}$$

usando o método das diferenças finitas numa malha uniforme de espaçamento $h = \frac{1}{4}$.

18. **(Exercício 8.5, p269)** Usar o método das diferenças finitas para aproximar o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} -Tu''(x) + ku(x) = w(x) & \text{se } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases}$$

onde u representa o deslocamento vertical de uma corda de comprimento 1, submetida a uma carga transversal de intensidade w por unidade de comprimento, T é a tensão e k um coeficiente associado à elasticidade da corda. No caso em que $w(x) = 1 + \sin(4\pi x)$, $T = 1$ e $k = 0{,}1$, calcular a solução correspondente a $h = \frac{1}{4}$.