1. Mostre que o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{1}{1+y^2} \\ y(a) &= \alpha \end{cases}$, para $t \in [a,b]$, tem solução única.

2. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine, usando o método de Euler progressivo (ou explícito)
$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i),$$
o valor aproximado de $y(1)$, fazendo $h = 1$, $h = 0{,}5$ e $h = 0{,}25$. Compare os resultados obtidos sabendo que a solução exacta é $y(t) = e^{-2t}$.

3. Num circuito de voltagem aplicada E, resistência R, inductância L e capacitância C em paralelo, a corrente I satisfaz a equação diferencial
$$I' = CE'' + \frac{E'}{R} + \frac{E}{L}.$$
Suponha que $C = 0{,}3\ farad$, $R = 1{,}4\ ohm$, $L = 1{,}7\ henry$ e a voltagem é dada pela equação $E(t) = e^{-0{,}06\pi t}\sin(2t - \pi)$. Se $I(0) = 0$, determine o valor da corrente I para $t = 0{,}2j$, para $j = 1, \ldots, 5$, usando o método de Euler progressivo.

4. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -50y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ e os métodos de Euler progressivo e Euler regressivo (ou impícito)
$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}).$$
Usando cada um dos métodos determine a solução do problema em $t = 1$ com $h < 1$, comparando os resultados obtidos.

5. Prove que os métodos de Euler progressivo e regressivo são consistentes e determine a sua ordem e erro de truncatura local.

6. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -ty^2 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(1)$, usando o método de Crank-Nicolson (ou dos trapézios)
$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$
usando $h < 1$.

7. Determine as regiões de estabilidade absoluta do métodos de Euler, Euler regressivo e trapézios.

8. Mostre que os métodos dos trapézios e Euler regressivo são A-estáveis.

9. **(Matlab)** Aplique os métodos de Euler regressivo e progressivo à resolução do problema de Cauchy
$$y' = \sin t + y, \quad t \in]0,1], \quad y(0) = 0.$$
Compare os resultados obtidos com a solução exacta $y(t) = -\frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) + \frac{1}{2}e^t$.

10. **(Matlab)** Considerar o problema de Cauchy $y' = -te^{-y}, \quad t \in]0,1], \quad y(0) = 0.$
    (a) Aplique os métodos de Euler progressivo e regressivo com $h = 1/2, 1/2^2, ..., 1/2^{10}$.
    (b) Compare os resultados obtidos na alínea anterior com a solução exacta $y(t) = \ln(1 - \frac{t^2}{2})$.

11. **(Matlab)** Considere o problema de Cauchy

$$y' = -10y, \quad 0 < t \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

cuja solução é $y(t) = e^{-10t}$. O que é que se passa quando se aplica um método de Euler com $h = 0{,}1$?

12. **(Matlab)** Compare as soluções numéricas dos seguintes problemas com condição inicial:

    (a) $y' = 1 - y, \quad 0 < t \leq 2, \quad y(0) = 0, \qquad$ e $\qquad y' = 1 - y + 0{,}1, \quad 0 < t \leq 2, \quad y(0) = 0{,}1$

    (b) $y' = y, \quad 2 < t \leq 4, \quad y(2) = 0, \qquad$ e $\qquad y' = y + 0{,}01, \quad 2 < t \leq 4, \quad y(2) = 0{,}1.$

13. **(Matlab)** Consideremos um corpo pontual de massa m e temperatura interna T inserido num meio ambiente de temperatura constante $T_a = 200$ K. A transferência de calor entre o corpo e o exterior pode ser descrita pela lei de *Stefan-Boltzmann*

$$v(t) = \varepsilon\gamma S(T^4(t) - T_a^4),$$

com t variável temporal, ε a constante de Boltzmann ($5{,}6 \times 10^8$ J/m^2 K^{4}s), γ constante de emissividade do corpo, S a área da sua superfície e v a velocidade de transferência de calor. A taxa de variação de energia $E(t) = mCT(t)$ (onde C designa o calor específico do material que constitui o corpo) é igual, em valor absoluto, à velocidade v. Por conseguinte, fazendo $T(0) = T_0$, o cálculo de $T(t)$ exige a resolução da equação diferencial ordinária

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{v(t)}{mC}.$$

Suponha que o corpo em questão é um cubo de lado 1m e massa 1 Kg, $T_0 = 180$ K, $\gamma = 0.5$ e $C = 100$. Recorra a um método de Euler para comparar os resultados obtidos com $h = 10$ e $h = 20$, para t a variar entre 0 e 200 segundos.

14. **(Matlab)** Considere o seguinte problema de Cauchy

$$y' = \lambda y, \quad t > 0, \quad y(0) = 1,$$

onde λ é um número real negativo. A solução exacta é $y(t) = e^{\lambda t}$ que tende para zero quando t tende para infinito. Faça $\lambda = -1$.

    (a) Represente graficamente, no intervalo [0,30], as soluções obtidas para três valores diferentes de h: $h = 30/14$, $h = 30/16$ e $h = 1/2$, usando os métodos de Euler implícito e explícito.

    (b) Resolva a alínea anterior com o método de Crank-Nicolson, para os valores de h referidos anteriormente.

15. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= ty^2 \\ y(1) &= 2 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(1{,}1)$, usando o método de Heun:

$$k_1 = f(t_i, u_i), \quad k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1), \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

16. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= y - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(0{,}8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

17. Mostre que, quando o segundo membro f não depende de y, o método de Runge-Kutta de quarta ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson.

18. Mostre que o método de Heun é absolutamente estável se $-2 \leq h\lambda \leq 0$, em que λ é um real negativo.

19. O método de Euler modificado é definido por:

$$u^*_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i), \qquad u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u^*_{i+1}).$$

Determinar a condição sobre h para que este método seja absolutamente estável.

20. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$, onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante, respectivamente, (em graus Celsius), e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considerando que uma esfera de metal aquecida a 90^oC é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, use um método numérico para calcular quanto tempo leva a esfera a arrefecer até aos 30^oC se $k = 0{,}1$ min^{-1}.

21. **(Matlab)** Aproxime a solução do problema

$$y'(t) = \arctan(3y) - 3y + t, \quad t > 0, \quad y(0) = 1$$

usando o método:

(a) de Euler progressivo, com $h = 2/3$ e $h = 2/3 + 0{,}1$;
(b) de Euler regressivo, para os valores do passo de discretização dados na alínea anterior;
(c) de Crank-Nicolson;
(d) ode23;
(e) ode45.

Comente os resultados obtidos.

22. **(Matlab)** A função $y(t)$ indica a quantidade vendida de um determinado produto ao fim de t meses após ter sido introduzido no mercado. Suponha que $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{t(t+1)}.$$

Ao fim do primeiro mês foram vendidas 1000 unidades daquele produto. A solução do problema é $y(t) = \frac{4000t^2}{(1+t)^2}$.

(a) Aproxime a solução do problema durante o primeiro ano, usando diferentes métodos numéricos.
(b) Tendo em conta a evolução da venda do produto mensalmente durante o primeiro ano, aproxime o valor das vendas após 8 meses.

23. Considere a equação diferencial $y'' + 4ty' + 2y^2 = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Com $h = 0{,}1$, utilize os métodos de Euler progressivo e de Heun para obter aproximações para $y(0{,}5)$ e $y'(0{,}5)$.

24. A equação de Van der Pol

$$u'' - \mu\left(u^2 - 1\right)u' + u = 0, \ \mu > 0,$$

é um modelo para o fluxo de corrente num tubo de vácuo com três elementos internos. Seja $\mu = 0{,}5$ e $u\,(0) = 0$, $u'\,(0) = 1$. Aproxime $u\,(1)$ e $u'\,(1)$ usando o método de Euler regressivo, com medida do passo $h = 0{,}5$.

25. Determine a solução aproximada do problema $\begin{cases} -y'' + y = x, & x \in]0,1[, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$ usando o método das diferenças finitas numa malha uniforme de espaçamento $h = \frac{1}{4}$.

26. Usar o método das diferenças finitas para aproximar o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} -Tu''(x) + ku(x) = w(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde u representa o deslocamento vertical de uma corda de comprimento 1, submetida a uma carga transversal de intensidade w por unidade de comprimento, T é a tensão e k um coeficiente associado à elasticidade da corda. No caso em que $w(x) = 1 + \sin(4\pi x)$, $T = 1$ e $k = 0{,}1$, calcular a solução correspondente a $h = \frac{1}{4}$.