Matemática Computacional

Equações não lineares

1. Diz-se que uma sucessão $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}$ converge *de forma quadrática* para x^* se existirem um inteiro k_0 e um escalar $c \in [0,1)$ tais que
$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq c|x^{(k)} - x^*|^2, \text{ para todo } k \geq k_0.$$
Averigue se as sucessões $\{1/k\}$ e $\{1 + (0.5)^{2^k}\}$ convergem de forma quadrática para 0 e 1, respectivamente.

2. Use o método da bissecção para aproximar a solução, com erro inferior a 10^{-2}, da equação $x + 0.5 + 2\cos(\pi x) = 0$ no intervalo $[0.5, 1.0]$.

3. Determine o número de iterações necessárias para aproximar, pelo método da bissecção e com uma precisão de 10^{-1}, a solução de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Determine tal aproximação com a precisão indicada.

4. A componente forçada de uma tensão transitória para um dado circuito pode ser traduzida pela expressão $\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi)$. Usando o método da bissecção duas vezes, determine a tensão máxima deste circuito.

5. Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0,1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão $h(t) = (t-1)e^t - t + 3$.
   (a) Calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, aplicando o método de Newton duas vezes.
   (b) Aproxime a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

6. Considere a função f definida por $f(x) = e^{-x}\ln x$, $x > 0$. Utilizando o método de Newton, aproxime a abcissa do seu ponto de inflexão, em segunda aproximação, partindo de um intervalo com amplitude inferior ou igual a 1. Indique uma estimativa para o erro cometido.

7. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$.

8. Mostre que $x = \frac{1}{2}\cos x$ tem uma solução α. Obtenha, em seguida, um intervalo $[a, b]$ que contenha a referida raiz e tal que para todo o $x^{(0)}$ nesse intervalo a sucessão $x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\cos x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, convirja para α. Justifique.

9. Determine os extremos locais da função $f(x) = \frac{x^3}{3} + 10\sin x$, com um erro inferior a 10^{-4}, usando o método iterativo do ponto fixo.

10. Determine uma aproximação para a maior raiz de $e^x - 4x^2 = 0$, usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

11. A equação de Kepler, usada para calcular as órbitas dos satélites, é $M = x - E\sin x$. Dado $E = 0.2$, resolva a equação para $M = 0.5$ e $M = 0.8$ com quatro casas decimais correctas.

12. Pretende construir-se uma ponte entre duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = \ln(x)$, determine o comprimento da ponte.

13. Considere a equação $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 - kx^2 + mx - n = 0$.

    (a) Determine m, n e k de modo a que esta equação admita 1 como raiz tripla.

    (b) Localize e separe as raízes.

    (c) Determine, pelo método mais conveniente, a menor raiz da equação.

14. Considere a equação polinomial $x^3 + kx^2 + 2x - 1 = 0$, com $k \geq 0$.

    (a) Determine o conjunto de todos os valores de k para os quais a equação tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.

    (b) Tome para k o menor valor inteiro positivo do conjunto obtido na alínea anterior e: faça a separação completa das raízes da equação dada; aproxime a menor raiz real daquela equação pelo método de Newton.

15. Para resolver o sistema de equações diferenciais de segunda ordem $\left\{ \begin{array}{l} x'' + x + 2y' + y = f(t) \\ x'' - x + y = g(t) \end{array} \right.$, com $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$, pelo método das transformadas de Laplace, torna-se necessário factorizar a expressão $\left(S^2+1\right) S - (2S+1)\left(S^2-1\right) = -S^3 - S^2 + 3S + 1$, por forma a obter a transformação inversa. Quais são os referidos factores?

16. Pretende construir-se um depósito semi-esférico, de raio r, para armazenar um líquido até uma altura h. Sabendo que o volume do referido líquido é dado pela expressão $V = \frac{\pi\left(2r^3 - 3r^2h + h^3\right)}{3}$, qual o raio com que se deve construir o depósito se se pretender guardar no máximo 250 *litros* de líquido a uma altura de 2 *metros*?

17. Um corpo de massa 1 kg, que se move apenas ao longo de uma linha recta e que inicialmente se encontra em repouso no ponto de coordenadas $x = 2$, fica sujeito a uma força cuja intensidade em cada instante t é dada por $F(t) = -1 + 2t - 3t^2$. Localize e separe os instantes de tempo em que o corpo passa pela origem do referencial.

18. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathbb{R}^n$.

    (a) Norma ℓ_1: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$

    (b) Norma ℓ_2 ou norma euclidiana: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$

    (c) Norma ℓ_∞, norma máxima ou norma de Chebyshev: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$

19. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1, \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$

20. Diz-se que uma sucessão $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ converge *de forma quadrática* para x^* se existirem um inteiro k_0 e um escalar $c \geq 0$ tais que

    $$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq c\|x^{(k)} - x^*\|^2, \text{ para todo } k \geq k_0.$$

    Será possível que se tenha convergência de forma quadrática para uma das normas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_∞ e não para uma das outras duas? Explique sumariamente.

21. O seguinte sistema de equações não lineares possui duas soluções, uma das quais é $(x, y) = (3, 0)$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 2x + y^2 - 3 & = & 0 \\ x(6 - x) + y - 9 & = & 0. \end{array} \right.$$

Localize e determine a outra solução efectuando duas aproximações do método de Newton.

22. O sistema $\left\{ \begin{array}{l} -x(x+2) + 2y = 7 \\ x^2 + (y-3)^2 = 9 \end{array} \right.$ tem duas soluções. Localize-as graficamente e determine uma aproximação da solução de maior abcissa usando o método de Newton e iterando duas vezes.

23. Considere a seguinte função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$F(x) = \left[\begin{array}{c} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ \exp(x_1 - 1) + x_2^3 - 2 \end{array} \right]$$

   (a) Identifique uma das raízes x^* de F.

   (b) Efectue uma iteração do Método de Newton para aproximar x^* a partir do ponto inicial $x^{(0)} = (2, 1/2)$.

24. Aplique duas iterações do método de Newton ao sistema de equações não lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{x_1} - 1 = 0 \\ e^{x_2} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

começando com $x^{(0)} = (-10, -10)$. O que é que aconteceria se continuasse a aplicar o método de Newton?

25. **(Exercício 2.4, p68)** Mostrar a desigualdade (2.6).

26. **(Exercício 2.5, p68)** Explicar porque é que no Programa 2.1 se usou a fórmula `x(2) = x(1)+(x(3)-x(1))*0.5` em vez da fórmula mais natural `x(2) = (x(1)+x(3))*0.5`, para calcular o ponto médio.

27. **(Exercício 2.7, p68)** Aplicar o método de Newton ao cálculo da raiz quadrada de um número posiivo a. Proceder de maneira análoga para calcular a raiz cúbica de a.

28. **(Exercício 2.11, p69)** Utilizar o método de Newton para calcular o zero de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 2^{-x} + 3x 4^{-x} - 8^{-x}$$

em $[0, 1]$ e explicar porque é que a convergência não é quadrática.

29. **(Exercício 2.15, p69)** Seja ϕ_N a função iteradora do método de Newton considerado como uma iteração de ponto fixo. Mostrar que $\phi'_N(\alpha) = 1 - 1/m$, onde α é um zero de f de multiplicidade m. Deduzir que o método de Newton converge quadraticamente se α for uma raiz simples de $f(x) = 0$, e linearmente no caso contrário.

30. **(Exercício 2.16, p70)** Deduzir a partir do gráfico de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ que esta função tem um único zero real α. Para calcular α utilizar as seguintes iterações do ponto fixo: dado $x^{(0)}$, definir $x^{(k+1)}$ tal que

$$x^{(k+1)} = \frac{2\left(x^{(k)}\right)^2 + 4\left(x^{(k)}\right)^2 + 10}{3\left(x^{(k)}\right)^2 + 8x^{(k)}}, \qquad k \geq 0$$

e analisar a sua convergência para α.