1. Use o método da bissecção para aproximar a solução, com erro inferior a 10^{-2}, da equação
$$x + 0{,}5 + 2\cos(\pi x) = 0$$
no intervalo $[0{,}5, 1]$.

2. Determine o número mínimo de iterações necessárias para aproximar, pelo método da bissecção e com uma precisão de 10^{-1}, a solução de
$$x^3 - x - 1 = 0$$
no intervalo $[1, 2]$. Determine tal aproximação com a precisão indicada.

3. A componente forçada de uma tensão transitória para um dado circuito pode ser traduzida pela expressão
$$\mathcal{E}(t) = e^{-0{,}06\pi t}\sin(2t - \pi).$$
Usando o método da bissecção duas vezes, determine a tensão máxima deste circuito.

4. Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0, 1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão
$$h(t) = (t - 1)e^t - t + 3.$$
   (a) Calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, aplicando o método de Newton duas vezes.
   (b) Aproxime a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

5. Considere a função f definida por
$$f(x) = e^{-x}\ln x, \qquad x > 0.$$
Utilizando o método de Newton, aproxime a abcissa do seu ponto de inflexão, em segunda aproximação, partindo de um intervalo com amplitude inferior ou igual a 1. Indique uma estimativa para o erro cometido.

6. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$.

7. (**Exercício 2.7, p68**) Aplicar o método de Newton ao cálculo da raiz quadrada de um número positivo a. Proceder de maneira análoga para calcular a raiz cúbica de a.

8. Mostre que
$$x = \frac{1}{2}\cos x$$
tem uma única solução α. Obtenha, em seguida, um intervalo $[a, b]$ que contenha α e tal que, para todo o x_0 nesse intervalo, a sucessão
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
convirja para α. Justifique.

9. Determine os extremos locais da função
$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 10\sin x,$$
com um erro inferior a 10^{-4}, usando o método iterativo do ponto fixo.

10. Determine uma aproximação para a maior raiz de
$$e^x - 4x^2 = 0,$$
usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

11. (**Exercício 2.11, p69**) Utilizar o método de Newton para calcular o zero de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 2^{-x} + 3x4^{-x} - 8^{-x}$$

em $[0, 1]$ e explicar porque é que a convergência não é quadrática.

12. (**Exercício 2.15, p69**) Seja ϕ_N a função iteradora do método de Newton considerado como uma iteração do ponto fixo. Mostrar que

$$\phi'_N(\alpha) = 1 - \frac{1}{m},$$

onde α é um zero de f de multiplicidade m. Deduzir que o método de Newton converge quadraticamente se α for uma raiz simples de $f(x) = 0$ e linearmente no caso contrário.

13. Considere a equação

$$x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 - kx^2 + mx - n = 0.$$

(a) Determine m, n e k de modo a que esta equação admita 1 como raiz tripla.

(b) Localize e separe as raízes.

(c) Determine, pelo método mais conveniente, a menor raiz da equação.

14. Considere a equação polinomial

$$x^3 + kx^2 + 2x - 1 = 0,$$

com $k \geq 0$.

(a) Determine o conjunto de todos os valores de k para os quais a equação tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.

(b) Tome para k o menor valor inteiro positivo do conjunto obtido na alínea anterior e faça a separação completa das raízes da equação dada.

(c) Aproxime a menor raiz real daquela equação pelo método de Newton.

15. Determine todas as raízes reais de

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

usando o algoritmo de Newton-Hörner.

16. O seguinte sistema de equações não lineares possui duas soluções, uma das quais é $(x, y) = (3, 0)$,

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 &= 0 \\ x(6 - x) + y - 9 &= 0 \end{cases}.$$

Localize e determine a outra solução efectuando duas aproximações do método de Newton.

17. Considere a seguinte função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ \exp(x_1 - 1) + x_2^3 - 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Identifique uma das raízes, α, de $F(x) = 0$.

(b) Efectue uma iteração do Método de Newton para aproximar α a partir do ponto inicial $x^{(0)} = (2, 1/2)$.

18. Aplique duas iterações do método de Newton ao sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^{x_1} - 1 &= 0 \\ e^{x_2} - 1 &= 0 \end{cases},$$

começando com $x^{(0)} = (-10, -10)$. O que é que aconteceria se continuasse a aplicar o método de Newton?