1. Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0,1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão $h(t) = (t-1)e^t - t + 3$.

   (a) Calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, aplicando o método de Newton duas vezes.

   (b) Aproxime a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.

2. Considere a função f definida por $f(x) = e^{-x}\ln x$, $x > 0$. Utilizando o método de Newton, aproxime a abcissa do seu ponto de inflexão, em segunda aproximação, partindo de um intervalo com amplitude inferior ou igual a 1. Indique uma estimativa para o erro cometido.

3. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1,0)$.

4. Aplicar o método de Newton ao cálculo da raiz quadrada de um número positivo a. Proceder de maneira análoga para calcular a raiz cúbica de a.

5. (**Matlab**) Use o método da bissecção para aproximar a solução, com erro inferior a 10^{-2}, da equação $x + 0{,}5 + 2\cos(\pi x) = 0$ no intervalo $[0{,}5, 1]$.

6. (**Matlab**) Determine o número mínimo de iterações necessárias para aproximar, pelo método da bissecção e com uma precisão de 10^{-1}, a solução de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1,2]$. Determine tal aproximação com a precisão indicada.

7. (**Matlab**) A componente forçada de uma tensão transitória para um dado circuito pode ser traduzida pela expressão $\mathcal{E}(t) = e^{-0{,}06\pi t}\sin(2t-\pi)$. Usando o método da bissecção duas vezes, determine a tensão máxima deste circuito.

8. (**Matlab**) Dada a função $f(x) = \cosh x + \cos x - \gamma$, para $\gamma = 1, 2, 3$, averigúe, em cada caso, se f tem zeros e, caso existam, aproxime o seu valor pelo método da bissecção, com um erro inferior a 10^{-10}.

9. (**Matlab**) A equação de um gás é definida por $\left[p + a(N/V)^2\right](V - Nb) = kNT$, em que p é a pressão, V o volume ocupado pelo gás à temperatura T, a e b são dois coeficientes que dependem do gás considerado, N é o número de moléculas contidas no volume V e k é a constante de Boltzmann ($k = 1{,}3806503 \times 10^{-23}$). Num M-file escreva as instruções que lhe permitam aproximar o volume V ocupado por 1000 moléculas de dióxido de carbono à temperatura $T = 300$ K e pressão $p = 3{,}5 \times 10^7$ Pa, pelo método da bissecção, com um erro inferior a 10^{-12}. Para o dióxido de carbono, tem-se $a = 0{,}401$ Pa, $b = 42{,}7 \times 10^{-6}$ m^3.

10. (**Matlab**) Um projéctil é lançado com uma velocidade v_0 e um ângulo α num túnel de altura h e atinge o seu máximo quando α for tal que $\sin(\alpha) = \sqrt{2gh/v_0^2}$, onde $g = 9{,}8$ m/s^2 é a aceleração da gravidade. Calcular α utilizando o método de Newton, supondo que $v_0 = 10$ m/s e $h = 1$ m.

11. (**Matlab**) Considere o sistema mecânico representado por quatro barras rígidas a_i, i=1,2,3,4. Para qualquer valor admissível do ângulo β formado pelas barras a_1 e a_4, determinamos o valor do ângulo correspondente α formado pelas barras a_1 e a_2. Partindo da identidade vectorial $a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0$ e observando que a barra a_1 está sempre alinhada com o eixo dos x, podemos obter a seguinte relação entre α e β

$$\frac{a_1}{a_2}\cos\beta - \frac{a_1}{a_4}\cos\alpha - \cos(\beta - \alpha) = -\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}{2a_2a_4}$$

onde a_i é o comprimento da i-ésima barra. Esta igualdade chama-se *equação de Freudenstein*, e pode escrever-se do seguinte modo: $f(\alpha) = 0$, em que

$$f(x) = \frac{a_1}{a_2}\cos\beta - \frac{a_1}{a_4}\cos x - \cos(\beta - x) + \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2}{2a_2a_4}.$$

Só para valores especiais de β é que existe uma expressão explícita da solução. Refira-se ainda que não existe solução para todos os valores de β, e que a solução existindo poderá não ser única. A fim de resolver a equação para qualquer valor de β a variar entre 0 e π, deveremos recorrer a métodos numéricos. Insira num M-file as instruções que lhe permitam aproximar o valor de α, através da equação não linear, recorrendo ao método de Newton, com $\beta \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ e com uma tolerância de 10^{-5}. Suponha que os comprimentos das barras são, respectivamente, $a_1 = 10$ cm, $a_2 = 13$ cm, $a_3 = 8$cm e $a_4 = 10$ cm. Para cada valor de β considerar dois dados iniciais $x^{(0)} = -0{,}1$ e $x^{(0)} = \frac{2\pi}{3}$.

12. Mostre que $x = \frac{1}{2}\cos x$ tem uma única solução α. Obtenha, em seguida, um intervalo $[a, b]$ que contenha α e tal que, para todo o x_0 nesse intervalo, a sucessão $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, convirja para α. Justifique.

13. Determine os extremos locais da função $f(x) = \frac{x^3}{3} + 10\sin x$, com um erro inferior a 10^{-4}, usando o método iterativo do ponto fixo.

14. Determine uma aproximação para a maior raiz de $e^x - 4x^2 = 0$, usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

15. Seja ϕ_N a função iteradora do método de Newton considerado como uma iteração do ponto fixo. Mostrar que $\phi'_N(\alpha) = 1 - \frac{1}{m}$, onde α é um zero de f de multiplicidade m. Deduzir que o método de Newton converge quadraticamente se α for uma raiz simples de $f(x) = 0$ e linearmente no caso contrário.

16. (**Matlab**) Considere a função $f(x) = e^x - 2x^2$.

    (a) Localize as raízes da equação $f(x) = 0$.

    (b) Determine uma estimativa para a maior raiz, usando o método do ponto fixo, com 5, 10 e 15 iterações.

    (c) Repita a alínea anterior, recorrendo ao método da bissecção. Compare os resultados obtidos.

17. (**Matlab**) Considere a equação $e^x - x - 2 = 0$.

    (a) Verifique que a equação dada tem uma única solução no intervalo $[1, 2]$.

    (b) Para aproximar o valor da solução pretende-se utilizar o método do ponto fixo, com uma das seguintes funções iteradoras: $g_1(x) = e^x - 2$, $g_2(x) = \ln(x + 2)$ e $g_3(x) = x - 0{,}1(e^x - x - 2)$. Indique qual ou quais das funções garante a convergência do método para a referida solução. Escolha uma aproximação inicial e considere tol$= 10^{-4}$.

    (c) Recorra ao método de Newton para aproximar a mesma solução e compare com o resultado obtido na alínea anterior.

18. (**Matlab**) Considere a equação $\ln x - \frac{1}{x} = 0$.

    (a) Verifique que a equação dada tem uma única solução no intervalo $[1, 2]$.

    (b) Para aproximar o valor da solução pretende-se utilizar o método do ponto fixo, com uma das seguintes funções iteradoras: $g_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e $g_2(x) = 1/\ln(x)$. Indique qual das funções garante a convergência do método para a referida solução, qualquer que seja o ponto inicial. Escolha uma aproximação inicial e considere tol$= 10^{-4}$.

    (c) Recorra ao método da bissecção para aproximar a mesma solução e compare com o resultado obtido na alínea anterior.

19. Considere a equação $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 - kx^2 + mx - n = 0$.

    (a) Determine m, n e k de modo a que esta equação admita 1 como raiz tripla.

    (b) Localize e separe as raízes.

    (c) Determine, pelo método mais conveniente, a menor raiz da equação.

20. Considere a equação polinomial $x^3 + kx^2 + 2x - 1 = 0$, com $k \geq 0$.

    (a) Determine o conjunto de todos os valores de k para os quais a equação tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.

(b) Tome para k o menor valor inteiro positivo do conjunto obtido na alínea anterior e faça a separação completa das raízes da equação dada.

(c) Aproxime a menor raiz real daquela equação pelo método de Newton.

21. (**Matlab**) Considere o polinómio $p(x) = x^3 - 36x^2 + 188x - 240$.

    (a) Verifique que um dos zeros de $p(x)$ se localiza no intervalo $[29{,}5, 31]$.

    (b) Para aproximar o zero referido na alínea anterior, podem ser usadas diferentes estratégias como, por exemplo:

    i. método da bissecção no referido intervalo, com tol$= 10^{-4}$;

    ii. método de Newton, com a aproximação inicial $x_0 = 29{,}5$ e tol$= 10^{-4}$.

    Compare os resultados obtidos com os dois métodos.

    (c) Para aproximar o mesmo zero de $p(x)$ use o método do ponto fixo com a função iteradora $g(x) = (240 + 36x^2 - x^3)/188$. Considere as seguintes aproximações iniciais $x_0 = 1$, $x_0 = 3$ e $x_0 = 31$ e compare os resultados obtidos, fazendo tol$= 10^{-4}$.

22. (**Matlab**) Determine todas as raízes reais de $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ e $-x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$ usando o algoritmo de Newton-Hörner.

23. Considere a seguinte função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ \exp(x_1 - 1) + x_2^3 - 2 \end{bmatrix}.$$

    (a) Identifique uma das raízes, α, de $F(x) = 0$.

    (b) Efectue uma iteração do Método de Newton para aproximar α a partir do ponto inicial $x^{(0)} = (2, 1/2)$.

24. Aplique duas iterações do método de Newton ao sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^{x_1} - 1 &= 0 \\ e^{x_2} - 1 &= 0 \end{cases},$$

    começando com $x^{(0)} = (-10, -10)$. O que é que aconteceria se continuasse a aplicar o método de Newton?

25. (**Matlab**) O seguinte sistema de equações não lineares possui duas soluções, uma das quais é $(x, y) = (3, 0)$,

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 &= 0 \\ x(6 - x) + y - 9 &= 0 \end{cases}.$$

    Localize e determine a outra solução efectuando cinco iterações do método de Newton.

26. (**Matlab**) Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ \sin(\frac{\pi x_1}{2}) + x_2^3 = 0 \end{cases}.$$

    (a) Localize graficamente as duas soluções do sistema.

    (b) Efectue duas iterações do método de Newton, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (1, 1)$.

    (c) Repita a alínea anterior com $x^{(0)} = (-1, -1)$. O que pode concluir?

27. (**Matlab**) Recorra ao método de Newton para determinar uma solução do sistema

$$\begin{cases} x = 0{,}7 \sin x + 0.2 \cos y \\ y = 0{,}7 \cos x - 0.2 \sin y \end{cases}$$

    próxima de $(0{,}5, 0{,}5)$.

28. (**Matlab**) Pretende construir-se uma ponte entre duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = \ln x$, determine um valor aproximado do comprimento da ponte.