Matemática Computacional

Sistemas Lineares

1. Aplicando o método de Jacobi, determine uma aproximação da solução do seguinte sistema
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$
começando com uma aproximação inicial $x^{(0)} = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

2. Obtenha duas aproximações para a solução do seguinte sistema linear
$$\begin{cases} -8x + y + z = 1, \\ x - 5y + z = 16, \\ x + y - 4z = 7, \end{cases}$$
partindo do vector inicial $x^{(0)} = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$, usando: (a) o método de Jacobi; (b) o método de Gauss-Seidel. Compare as aproximações obtidas com a solução do sistema.

3. Para aproximar a solução (x_1, x_2, x_3) de um sistema linear $Ax = b$, recorreu-se ao seguinte método iterativo
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.6x_2^{(k)} - 0.6x_3^{(k)} + 1, \\ x_2^{(k+1)} = -0.6x_1^{(k)} - 0.6x_3^{(k)} + 1, \\ x_3^{(k+1)} = -0.6x_1^{(k)} - 0.6x_2^{(k)} + 1, \qquad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$
   (a) Escreva a respectiva matriz de iteração. O método será convergente para todo o ponto inicial?
   (b) O método apresentado pode ser identificado com o método de Jacobi ou com o método de Gauss-Seidel? Justifique a sua resposta.
   (c) Sabendo que $b = [1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, obtenha a matriz A.

4. Considere o sistema linear
$$\begin{cases} 4x - y - z = 2, \\ x + ky + 3z = 4, \\ x + 2y + 0.5z = 4. \end{cases}.$$
   (a) Determine os valores do parâmetro k para os quais o sistema tem uma só solução.
   (b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método de Gauss-Seidel sem alterar o sistema? Justifique.
   (c) Determine valores de k para os quais seja garantida a convergência do método de Jacobi.
   (d) Faça $k = 0$ e calcule duas aproximações para a solução do sistema, utilizando o método de Jacobi.

5. Considere o seguinte sistema linear que envolve um parâmetro positivo a,
$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 2y + az = 0 \\ -x + 2z = 3 \end{cases}$$

(a) Determine todos os valores do parâmetro a que garantem a convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicado a este sistema.

(b) Para $a = -1$ efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

6. Considere o sistema linear,

$$\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

(a) Verifique que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema diverge.

(b) Reordene as equações de modo a obter um sistema equivalente que lhe permita garantir que este método converge.

7. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que o polinómio característico associado à matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior, é $P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda$.

(b) Localize e separe as raízes de $P(\lambda) = 0$.

(c) O método de Gauss-Seidel, aplicado ao sistema anterior, é convergente? Justifique.

(d) Determine a segunda aproximação gerada pelo método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que o polinómio característico associado a A é $P(\lambda) = -\lambda^3 - 7\lambda + 1$.

(b) Localize e separe todos os valores próprios de A.

(c) Seja A a matriz de iteração de um método iterativo que aproxima a solução de um sistema de equações lineares $Cx = d$. Será que, recorrendo ao resultado da alínea anterior, pode tirar alguma conclusão acerca da convergência desse método iterativo? Justifique.

9. São precisos três materiais para a produção de três tipos de automóveis, sendo na tabela que se segue indicadas as quantidades necessárias, em kilogramas por carro, de cada um desses materiais:

Carro	Plástico	Borracha	Metal
1	40	100	1500
2	33	120	1700
3	42	100	2000

Considerando que em cada dia há, respectivamente, 2.32, 6.4 e 109 toneladas de plástico, borracha e metal disponíveis, quantos automóveis de cada tipo podem ser produzidos de forma a que se esgote todo o material disponível?

10. **(Exercício 5.3, p165)** Determinar para que valores de ϵ a matriz A_ϵ definida abaixo não satisfaz as hipóteses da **Proposição 5.1**. Para que valor de ϵ é que esta matriz se torna singular? Será possível calcular a factorização LU neste caso?

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1-\epsilon & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

11. **(Exercício 5.5, p165)** Mostrar que a factorização LU de A pode ser usada para calcular a matriz inversa A^{-1}.
Sugestão: Observar que o j-ésimo vector coluna de A^{-1} é solução do sistema linear $Ax = e^j$, sendo e^j o vector cujas componentes são todas nulas, excepto a j-ésima que é igual a 1.

12. **(Exercício 5.6, p165)** Calcular os factores L e U da matriz A definida em (1) para $\epsilon = -10^{-15}/2$) e verificar que a factorização LU não tem boa precisão.

13. **(Exercício 5.8, p165)** Considerar o sistema linear $A_\epsilon x = b_\epsilon$ com A definido em (2) e b_ϵ tal que a solução correspondente é $\bar{x} \equiv (1,1,1)$, sendo ϵ um número real positivo. Calcular a factorização de Gauss de A_ϵ e notar que $l_{32} \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$. Verificar que apesar disso a solução calculada tem boa precisão.

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \epsilon-2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

14. **(Exercício 5.10, p166)** Mostrar que, $K(A^2) = (K(A))^2$ para toda a matriz simétrica e definida positiva A.

15. **(Exercício 5.11, p166)** Analisar as propriedades de convergência dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para a resolução de um sistema linear cuja matriz é

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

16. **(Exercício 5.12, p166)** Dar uma condição suficiente sobre β para que os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel sejam ambos convergentes quando aplicados à resolução de um sistema associado à matriz

$$A_\beta = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ \beta & 5 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

17. **(Exercício 5.14, p166)** Considerar o sistema linear $Ax = b$ com A definida em (4) e dizer se o método de Gauss-Seidel converge (para qualquer ponto inicial), sem calcular explicitamente o raio espectral da matriz de iteração.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

18. **(Exercício 5.15, p166)** Calcular a primeira iteração dos métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e do gradiente precondicionado (com precondicionador dado pela diagonal de A) para o sistema

$$2x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 + 3x_2 = 0,$$

usando $(1, 1/2)$ como ponto inicial.