1. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Mostre que $A$ admite uma decomposição $A = LU$.
   (b) Determine a solução dos sistema tendo em atenção a alínea (a).

2. Seja $A$ uma matriz invertível. Prove que o seu número de condição é maior ou igual à unidade.

3. Considere o sistema $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$, e seja $c = [1\ \ -1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, $\overline{b} = b + 0{,}1c$ e $\overline{\overline{b}} = b + 0{,}01c$. Alguma das soluções $\overline{x}$ e $\overline{\overline{x}}$, onde $A\overline{x} = \overline{b}$ e $A\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{b}}$, pode ser considerada uma “boa aproximação” para $x$?

4. **(Exercício 5.3, p165)** Determinar para que valores de $\epsilon$ a matriz $A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1-\epsilon & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ não satisfaz as hipóteses da **Proposição 5.1**. Para que valor de $\epsilon$ é que esta matriz se torna singular? Será possível calcular a factorização $LU$ neste caso?

5. **(Exercício 5.6, p165)** Calcular os factores $L$ e $U$ da matriz $A_\epsilon$ definida no exercício anterior, para $\epsilon = -10^{-15}/2$, e verificar que a factorização $LU$ não tem boa precisão.

6. Seja $A$ a matriz definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o número de condição da matriz $A$ associado à norma $\|\cdot\|_1$.
   (b) Suponha que, ao resolver o sistema $Ax = b$ por eliminação de Gauss, com $a = 10$, encontra uma solução $\hat{x}$ que satisfaz $\|A\hat{x} - b\|_1/\|b\|_1 < 10^{-3}$. Determine um majorante para o erro relativo de $\hat{x}$.

7. **(Exercício 5.10, p166)** Mostrar que, $K_2(A^2) = (K_2(A))^2$ para toda a matriz simétrica e definida positiva $A$.

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$, e verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(1+a^2) & 0 & -a/(1+a^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ a/(1+a^2) & 0 & 1/(1+a^2) \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ da matriz $A$.
   (b) Calcule $K_\infty(A)$ e $K_1(A)$. Para que valores de $a$ há mau condicionamento da matriz?

9. Aplicando o método de Jacobi, determine uma aproximação da solução do seguinte sistema
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$
começando com uma aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

10. Obtenha duas aproximações para a solução do seguinte sistema linear
$$\begin{cases} -8x + y + z = 1, \\ x - 5y + z = 16, \\ x + y - 4z = 7, \end{cases}$$
partindo do vector inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$, usando: (a) o método de Jacobi; (b) o método de Gauss-Seidel. Compare as aproximações obtidas com a solução do sistema.

11. Para aproximar a solução $(x_1, x_2, x_3)$ de um sistema linear $Ax = b$, recorreu-se ao seguinte método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= -0{,}6x_2^{(k)} - 0{,}6x_3^{(k)} + 1, \\ x_2^{(k+1)} &= -0{,}6x_1^{(k)} - 0{,}6x_3^{(k)} + 1, \\ x_3^{(k+1)} &= -0{,}6x_1^{(k)} - 0{,}6x_2^{(k)} + 1, \qquad k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

(a) Escreva a respectiva matriz de iteração. O método será convergente para todo o ponto inicial?

(b) O método apresentado pode ser identificado com o método de Jacobi ou com o método de Gauss--Seidel? Justifique a sua resposta.

(c) Sabendo que $b = [1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, obtenha a matriz $A$.

12. Considere o sistema linear $\begin{cases} 4x - y - z = 2, \\ x + ky + 3z = 4, \\ x + 2y + 0.5z = 4. \end{cases}$

(a) Determine os valores do parâmetro $k$ para os quais o sistema tem uma só solução.

(b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método de Gauss-Seidel sem alterar o sistema? Justifique.

(c) Determine valores de $k$ para os quais seja garantida a convergência do método de Jacobi.

(d) Faça $k = 0$ e calcule duas aproximações para a solução do sistema, utilizando o método de Jacobi.

13. Considere o sistema linear $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 2y + az = 0, \\ -x + 2z = 3, \end{cases}$ com $a \in \mathbb{R}^+$.

(a) Determine todos os valores do parâmetro $a$ que garantem a convergência do método de Gauss--Seidel quando aplicado a este sistema.

(b) Para $a = -1$ efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

14. Considere o sistema linear $\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

(a) Verifique que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema diverge.

(b) Reordene as equações de modo a obter um sistema equivalente que lhe permita garantir que este método converge.

15. Considere o sistema $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Prove que o polinómio característico associado à matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior, é $P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda$.

(b) Localize e separe as raízes de $P(\lambda) = 0$.

(c) O método de Gauss-Seidel, aplicado ao sistema anterior, é convergente? Justifique.

(d) Determine a segunda aproximação gerada pelo método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior.

16. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que o polinómio característico associado a $A$ é $P(\lambda) = -\lambda^3 - 7\lambda + 1$.

(b) Localize e separe todos os valores próprios de $A$.

(c) Seja $A$ a matriz de iteração de um método iterativo que aproxima a solução de um sistema de equações lineares $Cx = d$. Será que, recorrendo ao resultado da alínea anterior, pode tirar alguma conclusão acerca da convergência desse método iterativo? Justifique.