1. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Mostre que A admite uma decomposição $A = LU$.
   (b) Determine a solução dos sistema tendo em atenção a alínea (a).

2. Seja A uma matriz invertível. Prove que o seu número de condição é maior ou igual à unidade.

3. Considere o sistema $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$, e seja $c = [1 \ \ -1 \ 1 \ 1]^{\mathrm{T}}$, $\overline{b} = b + 0{,}1c$ e $\overline{\overline{b}} = b + 0{,}01c$. Alguma das soluções $\overline{x}$ e $\overline{\overline{x}}$, onde $A\overline{x} = \overline{b}$ e $A\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{b}}$, pode ser considerada uma "boa aproximação" para x?

4. Seja A a matriz definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o número de condição da matriz A associado à norma $\|\cdot\|_1$.
   (b) Suponha que, ao resolver o sistema $Ax = b$ por eliminação de Gauss, com $a = 10$, encontra uma solução $\hat{x}$ que satisfaz $\|A\hat{x} - b\|_1 / \|b\|_1 < 10^{-3}$. Determine um majorante para o erro relativo de $\hat{x}$.

5. Mostrar que, $K_2(A^2) = (K_2(A))^2$ para toda a matriz simétrica e definida positiva A.

6. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$, e verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(1+a^2) & 0 & -a/(1+a^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ a/(1+a^2) & 0 & 1/(1+a^2) \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ da matriz A.
   (b) Calcule $K_\infty(A)$ e $K_1(A)$. Para que valores de a há mau condicionamento da matriz?

7. **(Matlab)** Determine a factorização LU das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

8. **(Matlab)** Verifique que a matriz A $= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e positiva definida e determine a factorização LL^T de A.

9. **(Matlab)** Recorra à factorização LU para resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 = -8 \end{cases}$$

10. **(Matlab)** Determine a factorização $PA = LU$ das seguintes matrizes, recorrendo à escolha parcial de pivot:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

11. **(Matlab)** Considere o sistema linear $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \varepsilon - 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e b tal que a solução correspondente é $x = [1\ 1\ 1]^T$, sendo ε um número real positivo. Calcular a factorização $A = LU$ e concluir que $l_{32} \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$.

12. **(Matlab)**

    (a) Mostre que o sistema de equações lineares $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 1{,}0001x_1 + 2x_2 = 3{,}0001 \end{cases}$ tem a solução $[1\ 1]^T$.

    (b) Considere agora o seguinte sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 0{,}9999x_1 + 2x_2 = 3{,}0001 \end{cases}$. Calcule a solução do sistema. Será a matriz da alínea anterior mal condicionada?

13. **(Matlab)** Determine a solução do sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$:

    (a) usando a factorização LU, sem escolha parcial de pivot;

    (b) usando a factorização LU, com escolha parcial de pivot.

14. **(Matlab)** Um engenheiro electrotécnico supervisiona a produção de três tipos de componentes electrónicas. Três tipos de material - metal, plástico e borracha - são necessários para a produção. As quantidades exigidas para produzir cada componente são indicadas na tabela.

componente	metal(g/componente)	plástico(g/componente)	borracha(g/componente)
1	15	0,30	1,0
2	17	0,40	1,2
3	19	0,55	1,5

    Se diariamente estiverem disponíveis 3,89, 0,095 e 0, , 282 quilogramas de metal, plástico e borracha, respectivamente, quantas componentes podem ser produzidas por dia?

15. **(Matlab)** O seguinte sistema de equações foi obtido aplicando a lei da corrente em rede a um determinado circuito.

$$\begin{cases} 55I_1 - 25I_4 = -200 \\ -37I_3 - 4I_4 = -250 \\ -25I_1 - 4I_3 + 29I_4 = 100 \end{cases}$$

    Resolva o sistema.

16. **(Matlab)** O sistema $Ax = b$ tem solução única. Use a factorização LU para a determinar, sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

17. **(Matlab)** Considere os dados da tabela

Teste	Tensão	Deformação
1	0,00	0,00
2	0,06	0,08
3	0,14	0,14
4	0,25	0,20
5	0,31	0,23
6	0,47	0,25
7	0,60	0,28
8	0,70	0,29

    correspondentes aos valores da deformação para diferentes valores da tensão aplicada numa amostra de tecido biológico (um disco invertebral). Determine a equação da recta de regressão, usando processos diferentes: (a) a instrução **polyfit**. (b) o comando \.

18. Aplicando o método de Jacobi, determine uma aproximação da solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

começando com uma aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$.

19. Obtenha duas aproximações para a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} -8x + y + z = 1, \\ x - 5y + z = 16, \\ x + y - 4z = 7, \end{cases}$$

partindo do vector inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$, usando: (a) o método de Jacobi; (b) o método de Gauss-Seidel. Compare as aproximações obtidas com a solução do sistema.

20. Para aproximar a solução (x_1, x_2, x_3) de um sistema linear $Ax = b$, recorreu-se ao seguinte método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}6x_2^{(k)} - 0{,}6x_3^{(k)} + 1, \\ x_2^{(k+1)} = -0{,}6x_1^{(k)} - 0{,}6x_3^{(k)} + 1, \\ x_3^{(k+1)} = -0{,}6x_1^{(k)} - 0{,}6x_2^{(k)} + 1, \qquad k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

(a) Escreva a respectiva matriz de iteração. O método será convergente para todo o ponto inicial?

(b) O método apresentado pode ser identificado com o método de Jacobi ou com o método de Gauss--Seidel? Justifique a sua resposta.

(c) Sabendo que $b = [1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, obtenha a matriz A.

21. Considere o sistema linear $\begin{cases} 4x - y - z = 2, \\ x + ky + 3z = 4, \\ x + 2y + 0.5z = 4. \end{cases}$

(a) Determine os valores do parâmetro k para os quais o sistema tem uma só solução.

(b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método de Gauss-Seidel sem alterar o sistema? Justifique.

(c) Determine valores de k para os quais seja garantida a convergência do método de Jacobi.

(d) Faça $k = 0$ e calcule duas aproximações para a solução do sistema, utilizando o método de Jacobi.

22. Considere o sistema linear $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 2y + az = 0, \\ -x + 2z = 3, \end{cases}$ com $a \in \mathbb{R}^+$.

(a) Determine todos os valores do parâmetro a que garantem a convergência do método de Gauss--Seidel quando aplicado a este sistema.

(b) Para $a = -1$ efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

23. Considere o sistema linear $\begin{cases} x - 2y = -2, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

(a) Verifique que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema diverge.

(b) Reordene as equações de modo a obter um sistema equivalente que lhe permita garantir que este método converge.

24. Considere o sistema $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Prove que o polinómio característico associado à matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior, é $P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda$.

   (b) Localize e separe as raízes de $P(\lambda) = 0$.

   (c) O método de Gauss-Seidel, aplicado ao sistema anterior, é convergente? Justifique.

   (d) Determine a segunda aproximação gerada pelo método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior.

25. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que o polinómio característico associado a A é $P(\lambda) = -\lambda^3 - 7\lambda + 1$.

   (b) Localize e separe todos os valores próprios de A.

   (c) Seja A a matriz de iteração de um método iterativo que aproxima a solução de um sistema de equações lineares $Cx = d$. Será que, recorrendo ao resultado da alínea anterior, pode tirar alguma conclusão acerca da convergência desse método iterativo? Justifique.

26. **(Matlab)** O sistema $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -x + 10y = 19 \end{cases}$ tem a solução $[1\ 2]^{\mathrm{T}}$. Aproxime-a usando os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [0\ 0]^{\mathrm{T}}$, e compare os resultados.

27. **(Matlab)** Aplique os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel para aproximar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   para $\alpha = 2$ e $\alpha = -2$. Comente os resultados obtidos.

28. **(Matlab)** Verifique se os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem quando aplicados aos seguintes sistemas:

   (a) $\begin{cases} 9x + 3y + z = 13 \\ -6x + 8z = 2 \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y + 6z = 8 \\ x + 5y - z = 5 \\ 4x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} -3x + 4y + 5z = 6 \\ -2x + 2y - 3z = -3 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$.

29. **(Matlab)** Uma fábrica de equipamento electrónico produz transistores, resistências e chips de computadores. Para a respectiva construção, os materiais exigidos são cobre, zinco e vidro. O número de unidades necessárias para cada componente são indicadas na tabela.

componente	cobre	zinco	vidro
transistores	4	1	2
resistências	3	3	1
chips de computadores	2	1	3

   Numa determinada semana as quantidades de materiais disponíveis são 960 unidades de cobre, 510 de zinco e 610 de vidro.

   (a) Obtenha o sistema que permite determinar o número de componentes de cada tipo que podem ser produzidas naquela semana.

   (b) Aproxime a solução do sistema recorrendo aos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel.

   (c) Compare os resultados obtidos em (b) com a solução exacta.