Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Matemática Computacional

Valores e vectores próprios

1. Seja A uma matriz $n \times n$ da qual se conhece um vector próprio x. Mostre que x é vector próprio associado ao valor próprio
$$\lambda = \frac{x^H A x}{\|x\|^2},$$
onde x^H denota o vector-linha cuja i-ésima componente é igual ao complexo conjugado de x_i.

2. **(pg. 186, Exercício 6.1)** Efectue duas iterações do método da potência para aproximar o valor próprio de módulo máximo das seguintes matrizes
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 3.8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Os valores próprios destas matrizes são dados na seguinte tabela:

	λ_1	λ_2	λ_3
A_1	2	-1	0
A_2	2	-1.9	0
A_3	i	$-i$	0

O que acontecerá relativamente à convergência do método em cada dos casos?

3. **(pg. 186, Exercício 6.5)** Verificar que o método da potência não permite calcular o valor próprio de módulo máximo da seguinte matriz, e explicar porquê:
$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Seja A uma matriz invertível e seja μ um escalar real. Relativamente aos valores próprios de A, quais são os valores próprios
   (a) da matriz A^{-1}?
   (b) da matriz $A + \mu I$?

5. Localize, usando os círculos de Gershgorin, os valores próprios da seguinte matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

6. **(pg. 187, Exercício 6.9)** Mostrar que as matrizes $A^{(k)}$ construídas nas iterações do método QR são todas semelhantes à matriz A.