1. Seja $A$ uma matriz $n \times n$ da qual se conhece um vector próprio $x$. Mostre que $x$ é vector próprio associado ao valor próprio
$$\lambda = \frac{x^H A x}{\|x\|^2},$$
onde $x^H$ denota o vector-linha cuja $i$-ésima componente é igual ao complexo conjugado de $x_i$.

2. Efectue duas iterações do método da potência para aproximar o valor próprio de módulo máximo das seguintes matrizes
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 3{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Verificar que o método da potência não permite calcular o valor próprio de módulo máximo da seguinte matriz, e explicar porquê:
$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $A$ uma matriz invertível e seja $\mu$ um escalar real. Relativamente aos valores próprios de $A$, quais são os valores próprios
   (a) da matriz $A^{-1}$?
   (b) da matriz $A + \mu I$?

5. Localize, usando os círculos de Gershgorin, os valores próprios da seguinte matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

6. Considere a matriz
$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 & 3 \end{bmatrix}.$$
Com base no teorema de Gershgorin obtenha um majorante para o maior módulo de um valor próprio de $B$ e aproxime esse valor próprio efectuando duas iterações do método da potência.

7. Mostrar que as matrizes $A^{(k)}$ construídas nas iterações do método QR são todas semelhantes à matriz $A$.

8. **(Matlab)** Fixando a tolerância igual a $\varepsilon = 10^{-10}$ e partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [1\ 2\ 3]^{\mathrm{T}}$, usar o método da potência para aproximar o valor próprio de módulo máximo das seguintes matrizes
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 3{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comentar a convergência do método nos três casos.

9. **(Matlab)** Têm sido propostos vários modelos matemáticos com o objectivo de prever a evolução de determinadas espécies (humanas ou animais). O modelo de população mais simples, introduzido por Lotka em 1920 e formalizado por Leslie vinte anos mais tarde, é baseado nas taxas de mortalidade e fecundidade para diferentes intervalos de idade, digamos $i$=0,...,n. Seja $x_i^{(t)}$ o número de fêmeas (os machos não intervêm neste contexto) cujas idades no tempo $t$ pertencem ao $i$-ésimo intervalo. Os valores de $x_i^{(0)}$ são conhecidos. Além disso, seja $s_i$ a taxa de sobrevivência das fêmeas que pertencem ao $i$-ésimo intervalo, e $m_i$ o número médio de fêmeas geradas por uma fêmea no $i$-ésimo intervalo de idade.

   O modelo de Lotka e Leslie é definido pelas equações

$$x_{i+1}^{(t+1)} = x_i^{(t)} s_i, \qquad i = 0, ..., n-1,$$

$$x_0^{(t+1)} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{(t)} m_i.$$

   As $n$ primeiras equações descrevem o desenvolvimento da população, a última a sua reprodução. Em notação matricial, temos

$$x^{(t+1)} = Ax^{(t)},$$

   em que $x^{(t)} = \left[x_0^{(t)}, ..., x_n^{(t)}\right]^T$ e $A$ é a matriz de Leslie

$$A = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & ... & ... & m_n \\ s_0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & s_1 & \ddots & ... & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

   Pode mostrar-se que que a dinâmica desta população é determinada pelo valor próprio de módulo máximo de $A$, digamos $\lambda_1$, enquanto que a distribuição dos indivíduos nos diferentes intervalos de idade (normalizada pela população total), obtém-se como o limite de $x^{(t)}$ para $t \to +\infty$ e verifica $Ax = \lambda_1 x$.

   As características de uma populção de peixes são descritas pela seguinte matriz de Leslie anteriormente referida

| Intervalo de idade (meses) | $x^{(0)}$ | $m_i$ | $s_i$ |
|---|---|---|---|
| $0-3$ | 6 | 0 | 0.2 |
| $3-6$ | 12 | 0,5 | 0,4 |
| $6-9$ | 8 | 0,8 | 0,8 |
| $9-12$ | 4 | 0,3 | $-$ |

   Determinar o vector $x$ da distribuição normalizada desta população para diferentes intervalos de idade.

10. **(Matlab)** Verificar que o método da potência não permite calcular o valor próprio de módulo máximo da seguinte matriz, e explicar porquê:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. **(Matlab)** Usando os círculos de Gershgorin, dar uma estimativa do número máximo de valores próprios complexos das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

12. **(Matlab)** Use o comando ***eig*** para determinar todos os valores próprios das matrizes do exercício anterior.