Matemática Computacional Instruções para projecto
Universidade de Coimbra Projecto # 1
Professores Adérito Araújo, Gonçalo Pena e Marta Pascoal 20 de Maio de 2011

O projecto consiste num pequeno relatório de não mais de cinco páginas sobre um assunto. Do relatório não devem fazer parte listagens de programas nem *outputs* directos das execuções dos programas.

Os critérios de avaliação serão os seguintes:

- Descrição do problema (clara e sucinta).
- Identificação dos métodos numéricos envolvidos na resolução (o que pode incluir alguma explicação se o método não foi explicado nas aulas).
- Implementação desses métodos em Matlab.
- Execução dos programas em Matlab em exemplos práticos (poucos mas relevantes).
- Análise dos resultados numéricos obtidos.

O trabalho realizado deve ser submetido por correio electrónico, até ao dia 20 de Junho de 2011, para `MatComp.Testes@gmail.com` na forma de um ficheiro *zipado* com a designação `projectoX.zip` onde `X` deve ser substituído pelo dígito do número do projecto.

O ficheiro zip deve incluir: todos os ficheiros Matlab usados, um ficheiro pdf com o relatório, denominado `relatorioX.pdf`, e um ficheiro ascii, denominado `README`, contendo uma descrição sumária de todos os ficheiros enviados.

Dado o sistema linear $Ax = b$ onde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$, uma classe de métodos iterativos para aproximar a solução exacta do problema pode escrever-se na forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad x^{(0)} \text{ dado.}$$

Definindo $A = D - L - U$, onde

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel pertencem a esta classe de métodos fazendo, respectivamente,

$$B_J = D^{-1}(L+U) \quad \text{e} \quad g_J = D^{-1}b$$

e

$$B_{GS} = (D-L)^{-1}U \quad \text{e} \quad g_{GS} = (D-L)^{-1}b$$

Em certos problemas, estes métodos são divergentes ou têm convergência demasiado lenta. Uma estratégia para contornar estas dificuldades é a introdução de um *parâmetro de relaxação*, ω. Consideremos os métodos definidos por

- método de Jacobi com relaxação (JR):

  $B_{JR}(\omega) = \omega B_J + (1-\omega)I, \quad g_{JR}(\omega) = \omega g_J$

- método de Gauss-Seidel com relaxação (GSR):

  $B_{GSR}(\omega) = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega D^{-1}U], \quad g_{GSR}(\omega) = (\frac{1}{\omega}D - L)^{-1}b$

- método de Gauss-Seidel com relaxação simétrico (GSRS):

  $B_{GSRS}(\omega) = (D - \omega U)^{-1}(\omega L + (1-\omega)D)(D - \omega L)^{-1}(\omega U + (1-\omega)D), \quad g_{GSRS}(\omega) = \omega(2-\omega)(D-\omega U)^{-1}D(D-\omega L)^{-1}b$

Note-se que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel com relaxação $\omega = 1$ coincidem com os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Considere o sistema $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 62 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 50 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 58 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 66 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 54 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \end{bmatrix}$$

a. Poderá definir algum dos métodos acima referidos para calcular a solução do problema?

b. Fazendo variar o parâmetro de relaxação no intervalo $[-5, 5]$, calcule o raio espectral das matrizes de iteração dos métodos anteriores. Represente esta informação na forma de um gráfico.

c. Para cada um dos métodos, determine o parâmetro de relaxação, ω_{OPT}, que torna a convergência destes mais rápida.

d. Represente graficamente o erro absoluto associado a cada um dos métodos em função do número de iterações efectuado.

e. Para cada uma das funções obtidas na alínea anterior, ajuste uma curva do tipo $y = aC^k$ no sentido dos mínimos quadrados, onde a e C são constantes a determinar e k representa o número de iterações. O que representa a constante C?

f. Qual dos métodos escolheria para resolver o sistema?