Matemática Computacional Instruções para projecto
Universidade de Coimbra Projecto # 3
Professores Adérito Araújo, Gonçalo Pena e Marta Pascoal 20 de Maio de 2011

O projecto consiste num pequeno relatório de não mais de cinco páginas sobre um assunto. Do relatório não devem fazer parte listagens de programas nem *outputs* directos das execuções dos programas.

Os critérios de avaliação serão os seguintes:

- Descrição do problema (clara e sucinta).
- Identificação dos métodos numéricos envolvidos na resolução (o que pode incluir alguma explicação se o método não foi explicado nas aulas).
- Implementação desses métodos em Matlab.
- Execução dos programas em Matlab em exemplos práticos (poucos mas relevantes).
- Análise dos resultados numéricos obtidos.

O trabalho realizado deve ser submetido por correio electrónico, até ao dia 20 de Junho de 2011, para `MatComp.Testes@gmail.com` na forma de um ficheiro *zipado* com a designação `projectoX.zip` onde `X` deve ser substituído pelo dígito do número do projecto.

O ficheiro zip deve incluir: todos os ficheiros Matlab usados, um ficheiro pdf com o relatório, denominado `relatorioX.pdf`, e um ficheiro ascii, denominado `README`, contendo uma descrição sumária de todos os ficheiros enviados.

Pretende-se calcular o valor aproximado do integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

de uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

O método de integração de Romberg consiste em aplicar a regra dos trapézios em malhas uniformes convenientes e depois combinar esses resultados de uma forma inteligente para obter uma melhor aproximação para o valor do integral.

Se $h = b - a$ e $T(h)$ denotar o resultado obtido pela aplicação da regra dos trapézios composta com passo h, no intervalo $[a, b]$ então a aproximação gerada pelo método de Romberg obtém-se através do algoritmo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m,0} &= T\left(\frac{b-a}{2^m}\right), & m &= 0, \ldots, n \\ \mathcal{A}_{m,q+1} &= \frac{4^{q+1}\mathcal{A}_{m,q} - \mathcal{A}_{m-1,q}}{4^{q+1} - 1}, & q &= 0, \ldots, n-1 \\ & & m &= q+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

que pode ser representado através do diagrama

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathcal{A}_{0,0} & & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & & \\
\mathcal{A}_{1,0} & \rightarrow & \mathcal{A}_{1,1} & & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & & \\
\mathcal{A}_{2,0} & \rightarrow & \mathcal{A}_{2,1} & \rightarrow & \mathcal{A}_{2,2} & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \\
\mathcal{A}_{3,0} & \rightarrow & \mathcal{A}_{3,1} & \rightarrow & \mathcal{A}_{3,2} & \rightarrow & \mathcal{A}_{3,3} & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \searrow & \\
\mathcal{A}_{n,0} & \rightarrow & \mathcal{A}_{n,1} & \rightarrow & \mathcal{A}_{n,2} & \rightarrow & \mathcal{A}_{n,3} & \ldots & \rightarrow & \mathcal{A}_{n,n}
\end{array}$$

É possível mostrar, sob certas condições de regularidade da função f, que a sucessão anterior satisfaz

$$\mathcal{A}_{m,n} = \int_a^b f(x)dx + \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{2^m}\right)^{2(n+1)}\right). \tag{1}$$

a. Implemente uma função em MATLAB que, dado um intervalo $[a, b]$, uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e os índices m e n, implemente o algoritmo anterior para calcular $\mathcal{A}_{m,n}$.

b. Considere o integral

$$\int_0^\pi e^x \cos(x)dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$

(1) Faça uma tabela com o erro cometido na aproximação do integral anterior para valores de n e m a variar entre 0 e 5.

(2) Fixando $n = 0, 1, 2$ e fazendo m variar, faça um gráfico com o erro absoluto cometido nas três aproximações em função de h (considere m suficientemente grande tal que o menor valor de h seja superior a 10^{-6}). Qual a ordem de convergência dos três métodos? Os resultados que obtém são concordantes com a estimativa (1)?

(3) Proceda de modo análogo à alínea anterior e compare as aproximações obtidas com $\mathcal{A}_{m,0}$, $\mathcal{A}_{m,1}$ e $\mathcal{A}_{m,2}$, com o erro cometido com a regra dos trapézios, Simpson e ponto médio. Estime as ordens de convergência dos métodos e com base nesse resultado, indique qual das seis regras utilizaria para aproximar o valor do integral.

(4) Utilizando os comandos de Matlab `tic` e `toc`, compare os seis métodos referidos na alínea anterior relativamente aos tempos de execução (*Sugestão*: represente, em função de h, o tempo que demora a executar cada um dos métodos).