

O projecto consiste num pequeno relatório de não mais de cinco páginas sobre um assunto. Do relatório não devem fazer parte listagens de programas nem *outputs* directos das execuções dos programas.

Os critérios de avaliação serão os seguintes:

- Descrição do problema (clara e sucinta).
- Identificação dos métodos numéricos envolvidos na resolução (o que pode incluir alguma explicação se o método não foi explicado nas aulas).
- Implementação desses métodos em MATLAB.
- Execução dos programas em MATLAB em exemplos práticos (poucos mas relevantes).
- Análise dos resultados numéricos obtidos.

O trabalho realizado deve ser submetido por correio electrónico, até ao dia **20 de Junho de 2011**, para [MatComp.Testes@gmail.com](mailto:MatComp.Testes@gmail.com) na forma de um ficheiro *zipado* com a designação `projectoX.zip` onde X deve ser substituído pelo dígito do número do projecto.

O ficheiro zip deve incluir: todos os ficheiros MATLAB usados, um ficheiro pdf com o relatório, denominado `relatorioX.pdf`, e um ficheiro ascii, denominado `README`, contendo uma descrição sumária de todos os ficheiros enviados.

Pretende-se calcular o valor aproximado do integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

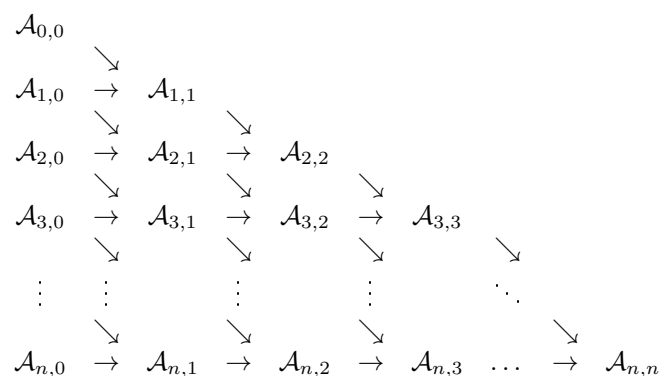
de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

O método de integração de Romberg consiste em aplicar a regra dos trapézios em malhas uniformes convenientes e depois combinar esses resultados de uma forma inteligente para obter uma melhor aproximação para o valor do integral.

Se  $h = b - a$  e  $T(h)$  denotar o resultado obtido pela aplicação da regra dos trapézios composta com passo  $h$ , no intervalo  $[a, b]$  então a aproximação gerada pelo método de Romberg obtém-se através do algoritmo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{m,0} &= T\left(\frac{b-a}{2^m}\right), & m = 0, \dots, n \\ \mathcal{A}_{m,q+1} &= \frac{4^{q+1}\mathcal{A}_{m,q} - \mathcal{A}_{m-1,q}}{4^{q+1} - 1}, & q = 0, \dots, n-1 \\ & & m = q+1, \dots, n. \end{aligned}$$

que pode ser representado através do diagrama



É possível mostrar, sob certas condições de regularidade da função  $f$ , que a sucessão anterior satisfaz

$$\mathcal{A}_{m,n} = \int_a^b f(x)dx + \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{2^m}\right)^{2(n+1)}\right). \quad (1)$$

- Implemente uma função em MATLAB que, dado um intervalo  $[a, b]$ , uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e os índices  $m$  e  $n$ , implemente o algoritmo anterior para calcular  $\mathcal{A}_{m,n}$ .
- Considere o integral

$$\int_0^\pi e^x \cos(x)dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$

- Faça uma tabela com o erro cometido na aproximação do integral anterior para valores de  $n$  e  $m$  a variar entre 0 e 5.
- Fixando  $n = 0, 1, 2$  e fazendo  $m$  variar, faça um gráfico com o erro absoluto cometido nas três aproximações em função de  $h$  (considere  $m$  suficientemente grande tal que o menor valor de  $h$  seja superior a  $10^{-6}$ ). Qual a ordem de convergência dos três métodos? Os resultados que obtém são concordantes com a estimativa (1)?

- (3) Proceda de modo análogo à alínea anterior e compare as aproximações obtidas com  $\mathcal{A}_{m,0}$ ,  $\mathcal{A}_{m,1}$  e  $\mathcal{A}_{m,2}$ , com o erro cometido com a regra dos trapézios, Simpson e ponto médio. Estime as ordens de convergência dos métodos e com base nesse resultado, indique qual das seis regras utilizaria para aproximar o valor do integral.
- (4) Utilizando os comandos de MATLAB `tic` e `toc`, compare os seis métodos referidos na alínea anterior relativamente aos tempos de execução (*Sugestão*: represente, em função de  $h$ , o tempo que demora a executar cada um dos métodos).