Matemática Computacional
Universidade de Coimbra
Professores Adérito Araújo, Gonçalo Pena e Marta Pascoal

Instruções para projecto
Projecto # 6
20 de Maio de 2011

O projecto consiste num pequeno relatório de não mais de cinco páginas sobre um assunto. Do relatório não devem fazer parte listagens de programas nem *outputs* directos das execuções dos programas.

Os critérios de avaliação serão os seguintes:

- Descrição do problema (clara e sucinta).
- Identificação dos métodos numéricos envolvidos na resolução (o que pode incluir alguma explicação se o método não foi explicado nas aulas).
- Implementação desses métodos em Matlab.
- Execução dos programas em Matlab em exemplos práticos (poucos mas relevantes).
- Análise dos resultados numéricos obtidos.

O trabalho realizado deve ser submetido por correio electrónico, até ao dia 20 de Junho de 2011, para `MatComp.Testes@gmail.com` na forma de um ficheiro *zipado* com a designação `projectoX.zip` onde `X` deve ser substituído pelo dígito do número do projecto.

O ficheiro zip deve incluir: todos os ficheiros Matlab usados, um ficheiro pdf com o relatório, denominado `relatorioX.pdf`, e um ficheiro ascii, denominado `README`, contendo uma descrição sumária de todos os ficheiros enviados.

A figura mostra um sinal de comprimento de 1000, corrompido com ruído. O objectivo consiste em estimar o sinal original. Este processo é chamado de reconstrução do sinal, ou de eliminação do ruído, ou alisamento. Neste problema pretende-se aplicar um método baseado no algoritmo dos mínimos quadrados.

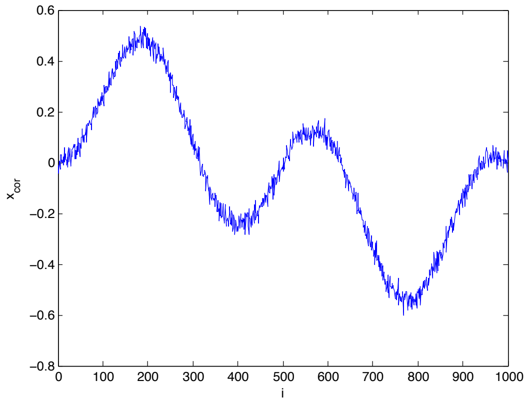

Figura 1: Sinal com ruído.

Vamos representar o sinal corrompido como um vector x_{cor} de tamanho 1000. (Os valores podem ser obtidos fazendo `xcor = dadosProjecto6`, onde `dadosProjecto6.m` é um ficheiro que pode ser obtido a partir da página da disciplina no InforEstudante.) O sinal estimado (ou seja, a variável do problema) será representado por um vector x de tamanho 1000.

A ideia do método é a seguinte. Suponhamos que o ruído no sinal é caracterizado por ser uma variável pequena e de variação rápida. Para reconstruir o sinal, decompõe-se x_{cor} em duas partes

$$x_{cor} = \hat{x} + v,$$

onde v é pequena e de variação rápida e $\hat{x}$ está próximo de x_{cor} ($\hat{x} \approx x_{cor}$) e tem variação lenta ($\hat{x}_{i+1} \approx \hat{x}_i$). Pode obter-se tal decomposição escolhendo x como sendo a solução do problema dos mínimos quadrados

$$\text{minimizar } \|x - x_{cor}\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^{999} (x_{i+2} - x_i)^2, \tag{1}$$

onde μ é uma constante positiva. O primeiro termo $\|x - x_{cor}\|_2^2$ mede o quanto x se desvia de x_{cor}. O segundo termo, $\sum_{i=1}^{999}(x_{i+2} - x_i)^2$, penaliza as rápidas mudanças do sinal entre duas amostras. Ao minimizar a soma ponderada de ambos os termos, obtemos uma estimativa x que está perto de x_{cor} (ou seja, tem um pequeno valor de $\|x - x_{cor}\|_2^2$) e varia lentamente (ou seja, tem um pequeno valor de $\sum_{i=1}^{999}(x_{i+2} - x_i)^2$). O parâmetro μ é usado para ajustar o peso relativo dos dois termos. O problema (1) é um problema dos mínimos quadrados, pois pode ser expresso como

$$\text{minimizar } \|Ax - b\|_2^2,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} I \\ \sqrt{\mu} D \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} x_{cor} \\ 0 \end{bmatrix},$$

e D é a matriz 999×1000 definida como

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz é muito grande (1999×1000), mas também muito esparsa e, como tal, um bom algoritmo para o problema dos mínimos quadrados é o da factorização de Cholesky.

a. Verifique que as equações normais são dadas por

$$(I + \mu D^T D)x = x_{cor} \tag{2}$$

O MATLAB fornece rotinas especiais para a resolução de equações lineares esparsas, e elas são utilizadas da forma seguinte. Existem dois tipos de matrizes: cheias (ou densas) e esparsas. Ao definir uma matriz, considera-se, por defeito, que ela é densa, a menos que se especifique que ela é esparsa. Pode converter-se uma matriz densa numa esparsa usando o comando `A = sparse (A)`, e um matriz esparsa numa densa usando o comando `A = full (A)`.

O comando para criar uma matriz esparsa nula de dimensão $m \times n$ é `A = sparse (m, n)`. O comando `A= speye (n)` cria a matriz identidade esparsa de dimensão $n \times n$.

b. Resolva o problema dos mínimos quadrados (2) com o vector x_{cor} definido em `dadosProjecto6.m`, para três valores de μ: $\mu = 1$, $\mu = 100$ e $\mu = 10000$. Trace os três sinais reconstruídos x.

c. Discuta o efeito de μ sobre a qualidade da estimativa x.