Matemática Computacional
Universidade de Coimbra
Professores Adérito Araújo, Gonçalo Pena e Marta Pascoal

Instruções para projecto
Projecto # 8
20 de Maio de 2011

O projecto consiste num pequeno relatório de não mais de cinco páginas sobre um assunto. Do relatório não devem fazer parte listagens de programas nem *outputs* directos das execuções dos programas.

Os critérios de avaliação serão os seguintes:

- Descrição do problema (clara e sucinta).
- Identificação dos métodos numéricos envolvidos na resolução (o que pode incluir alguma explicação se o método não foi explicado nas aulas).
- Implementação desses métodos em Matlab.
- Execução dos programas em Matlab em exemplos práticos (poucos mas relevantes).
- Análise dos resultados numéricos obtidos.

O trabalho realizado deve ser submetido por correio electrónico, até ao dia 20 de Junho de 2011, para `MatComp.Testes@gmail.com` na forma de um ficheiro *zipado* com a designação `projectoX.zip` onde `X` deve ser substituído pelo dígito do número do projecto.

O ficheiro zip deve incluir: todos os ficheiros Matlab usados, um ficheiro pdf com o relatório, denominado `relatorioX.pdf`, e um ficheiro ascii, denominado `README`, contendo uma descrição sumária de todos os ficheiros enviados.

O problema de Kepler descreve o movimento de dois corpos que se atraem mutuamente. Se escolhermos um dos corpos como o centro do sistema de coordenadas, é possível mostrar que o movimento permanece sempre no mesmo plano.

Denotando por $q = (q_1, q_2)$ a posição do segundo corpo, a Lei de Newton permite concluir, mediante uma conveniente normalização, que o movimento é dado por

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = J\nabla H(p,q), \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde a energia total do sistema (o Hamiltoniano) é

$$H(p,q) = H(p_1,p_2,q_1,q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}.$$

a. Determine a solução numérica do problema no intervalo $[0,T]$, considerando

$$p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad q_1(0) = 1-e, \quad q_2(0) = 0,$$

com $0 \le e < 1$ a excentricidade (pode considerar $e = 0{,}2$, $0{,}4$ e $0{,}6$) e $T = N \times 2\pi$ (a solução tem período 2π) com $N = 10, 100, 1000$.

Considere os métodos numéricos

Euler explícito: $u_{i+1} = u_i + hF(u_i)$,

Euler simplético: $p_{i+1} = p_i + hf(p_i, q_{i+1}), \quad q_{i+1} = q_i + hg(p_i, q_{i+1})$,

aplicados a um sistema da forma

$$u' = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p,q) \\ g(p,q) \end{bmatrix} = F(u).$$

b. Compare os métodos numéricos quanto ao esforço computacional e à qualidade das órbitas obtidas.