

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Um médico prescreve uma dosagem de uma determinada substância química a ser administrada oralmente. A quantidade de substância química assimilada pelo organismo, mais a que foi eliminada pela urina, T horas após ter sido tomada, é dada por $\int_0^T E(t) dt$, onde E é a taxa de eliminação da substância. Uma taxa de eliminação típica é dada pela função

$$E(t) = te^{-kt},$$

onde $k > 0$ e t é o tempo em horas.

- (a) Determine

$$\int_0^{+\infty} E(t) dt$$

e interprete a resposta, isto é, diga o que é que o integral representa.

- (b) Supondo que o médico prescreve uma dosagem de 100 mg, determine o valor de k .

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

(a) A equação $x^5 + 10x + 3 = 0$ tem exactamente uma raiz real.

(b) A função $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$, com a uma constante real, verifica a equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

(c) Se f é integrável em $[-a, a]$ e f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(d) Qualquer que sejam as matrizes invertíveis A e B , $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Calcule o valor dos seguintes integrais

(a) $\int_0^{\pi/2} (1+x) \text{sen } x dx$;

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$, com a substituição $u = \sqrt{2x-1}$.

4. Um isótopo de estrôncio, ^{90}Sr , tem uma meia-vida de 25 anos. Atendendo a que a sua taxa de decaimento é proporcional à massa existente em cada instante, calcule:

(a) a massa de ^{90}Sr que resta a partir de uma amostra de 18 mg depois de t anos;

(b) o tempo que levaria para a massa decair para 2 mg.

5. Seja dado o problema de condição inicial

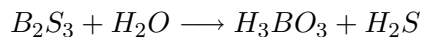
$$\begin{cases} y' \cos x & = & 1 - y \text{sen } x \\ y(0) & = & 1 \end{cases},$$

com $x \in [0, 1]$.

(a) Aproxime o valor da sua solução em $x = 1$ usando o método de Euler com $h = 0,5$. (Nota: Usar os valores de x em radianos.)

(b) Compare o resultado obtido com o da solução exacta.

6. O sulfureto de boro reage violentamente com a água para produzir ácido bórico e sulfureto de hidrogénio gasoso (o cheiro a ovos podres). A equação que descreve a reacção é:



Em que proporção devem os componentes ser misturados? (Nota: O número de átomos presentes mantém-se constante ao longo da reacção.)

7. Em função do valor do parâmetro real m , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x + y + (1 - m)z = 0 \\ -x + (1 + m)y + 2z = m + 2 \\ -mx + 2y + 3z = 2m + 2 \end{cases} .$$

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
Primitiva de $f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
Primitiva de $f' \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
Primitiva de $f' \operatorname{tg} f$	$-\ln \cos f + C$
Primitiva de $f' \operatorname{sec}^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
Método de Euler	$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$